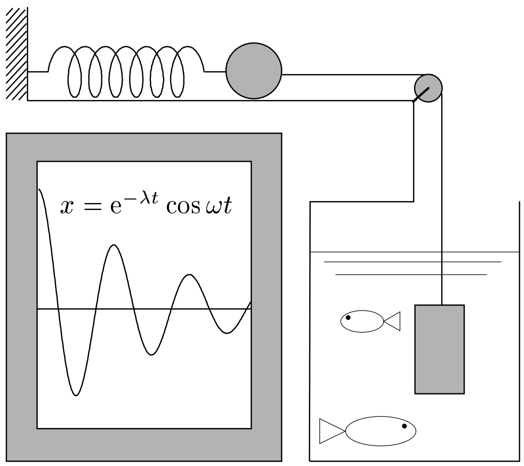
物理学 I，II を学ぶための

数　学

２００６年度改訂版



理工学部・理学科

渡川　　健
南　　宣行　　共著
御法川 幸雄

はじめに

物理学はあらゆる自然科学の基礎となるもので、理工学部のどの専門分野に進むにしてもその基本を根本から理解しておくことが大切です。とはいえ、最近、理工学部でも高校で物理を履修してこなかったり、履修していても習熟度が不足していると感じている学生が多数入学してくるのが今日的問題となってきました。しかし、公式いっぱいの高校の物理を学び終えたとしても、大学の物理を理解できるとは限らないのです。なぜでしょうか？物理学では、さまざまな自然現象を論理的思考にによって統一的に説明しようと試みます。このとき、現象の抽象化の方法は数学を手段として用いるのです。大学の物理では高校の物理では禁じ手であった数学を駆使しています。数式で表現されてこそ物理の本質的理解が可能になるからです。高校の物理では、自由落下、鉛直投げ上げ、水平投射、斜方投射にそれぞれの速度、加速度、位置が別々の公式で載っているのです。これがたった一つの運動方程式さえ知っていれば、すべて初期条件に応じて次々に導き出せるのです。この醍醐味を数学がかなえてくれるのです。裏返して言えば、理工学などのように系統的な積み重ねが必要な学問では、基礎となる数学や物理学で一度つまずくと、どんどん分からなくなってしまうと言えます。

しかし、昨今、「ゆとり」の名の下に、数学と物理学の内容を削減し続けてきた指導要領の度重なる改定により、物理学と同様数学の知識も怪しくなってきました。高校の数学の教科書でカバーされている分野の一部しか学んでいないために、全分野を学んだことを前提にしている大学の物理の内容が理解出来なくなってきました。たとえ、学んでいたとしても数学は数学、物理は物理として記憶のチャンネルに収められていて、両者の間には「有機的関連性」があるという認識に乏しい者も多く見かけるようになってきました。このような状況のもとで、高校の数学の復習も兼ね、大学の物理学が効率的に学べるテキストの出現が望まれています。

本書はこのような目的に沿って数学と物理学のドッキング的役割を担うようなテキストとして編まれたものです。物理学を学ぶ上で必要な数学の項目を系統的に配列し、随所に計算例や物理学への応用を取り入れて、物理学と数学の両者の相互理解が密になるように編集しました。授業の中では、物理のエッセンスを理解するために必要な個所だけマニュアル的に取り上げて説明してもよいでしょう。要は、その個所がどのような項目に含まれているかさらに深く知るためにはどの辺を深く勉強すればよいかを知ることができれ

ばそれでよいのです。本書の内容だけをもって、宇宙のダークマター（暗黒物質）の存在を言い当てたり、一般相対性理論でも成り立つフリードマン方程式が導けます。これにより、宇宙は開いているか、平坦であるか、それとも閉じているかという大問題を提起するすることさえ出来るのです。この他、知的好奇心をかきたてる数々のテーマが人類共通の言語である数学を通して理解できるようになるのです。人間っていうのは本来論理的思考の快感を好むように出来ているのです。さあ、このテキストを手元において、ミクロの世界からマクロの世界まで説明しょうと試みる物理学の基礎を学びましょう。

2006 年 3 月

理工学部・理学科
渡川　　健
南　　宣行
御法川幸雄

目 次

図 目 次

表 目 次

第1章　文字式

1.1　因数分解

$$
\begin{aligned}
x^2 + (a+b)x + ab &= (x+a)(x+b) && (1.1)\\
x^2 \pm 2ax + a^2 &= (x \pm a)^2 && (1.2)\\
x^2 - a^2 &= (x-a)(x+a) && (1.3)\\
acx^2 + (ad+bc)x + bd &= (ax+b)(cx+d) && (1.4)\\
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) && (1.5)\\
a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 &= (a \pm b)^3 && (1.6)\\
a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac &= (a+b+c)^2 && (1.7)\\
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)\\
&\times (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) && (1.8)
\end{aligned}
$$

パスカルの三角形を用いると、$(a+b)^n$ はすべて展開できる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a+b = 1\cdot a + 1\cdot b = a+b\\
\\
(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2\\
\\
(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3
\end{array}
$$

それぞれの上の数を加えていく。ただし、三角形の一番外側の数値はすべて１とする。

二項定理

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n\\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k && (1.9)\\
{}_nC_k &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} && (1.10)
\end{aligned}
$$

表 1.1: 二項係数

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

ただし、$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$　($n!$ はｎの階乗という)

例題
$(1+x)^{12}$ の展開式の x^7 の係数を求めよ。

$n = 12$　,　$k = 7$ の場合であるから、

$${}_{12}C_7 = \frac{12!}{7!(12-7)!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!5!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792$$

問題　次の整式を因数分解せよ。(　) 内は答

(1)　$x^2 + 8x + 15$　$((x+3)(x+5))$

(2)　$3x^2 + 7x + 2$　$((x+2)(3x+1))$

(3)　$x^3 + 64$　$((x+4)(x^2-4x+16))$

1.2　指数法則

$a > 0$, m, n を正の整数とすし、r を正の有理数とするとき、

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1 && (1.11)\\
a^m &= a \times a \times \cdots \times a \ (a \text{ を } m \text{ 個掛け合わせる}) && (1.12)\\
a^{-m} &= \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m && (1.13)\\
a^{-r} &= \frac{1}{a^r} && (1.14)\\
a^m a^n &= a^{m+n} && (1.15)\\
a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m && (1.16)\\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} && (1.17)\\
(a^m)^n &= a^{mn} && (1.18)
\end{aligned}
$$

(1.16) で $\dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ のとき、それぞれ $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$ とかく。

問題　次の計算をせよ。

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{625}$$

（解）　$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{625} = 5^{\frac{1}{3}} \times (5^4)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5^1 = 5$

1.3　方程式

1.3.1　２次方程式

２次方程式を $ax^2 + bx + c = 0$ とするとき、

- ２次方程式の解の公式
  ２次方程式の解は
  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.19}$$
  ここで、$D \equiv b^2 - 4ac$ とおくとき、D を判別式という。D の符号に応じて解の性質が異なる。
  解は表 1.2 の形に判別される。

表 1.2: 解の判別

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
異なる２つの実数解	１つの実数解（重解）	異なる２つの複素数解

問題　２次方程式 $3x^2-5x+1=0$ を解け。　$\left(x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}\right)$

例題１　$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$　の形に変形せよ

(解)

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

例題２　例題１の結果を用いて、解の公式を導け

(解)

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0\to a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\therefore\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\qquad x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- ２次方程式の解と係数の関係

  ２次方程式の解を α,β とするとき、$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形に因数分解できる。また、係数の間には次の関係が成立する。

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\tag{1.20}$$

$$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}\tag{1.21}$$

物理への応用

地面から初速度 v_0 で真上に投げたとき、時刻 t での小球の高さ y は

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

で表される。小球が高さ h のところを通過する時刻を求める。

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=h\quad\Longrightarrow\quad gt^2-2v_0t+2h=0$$

上の右側の式は t についての２次方程式である。その解は

$$t=\frac{v_0\pm\sqrt{v_0^2-2gh}}{g}$$

$D=v_0^2-2gh>0$ の時には、２つの実数解 t が求まる。

１つの解は上昇途中で h に到達する時刻で、他は最高点に達した後、落下途

中で h の高さを通過する時刻である。
$D = v_0^2 - 2gh = 0$ の場合は、解は一つになる。
この場合は h の値が最高点の高さと同じになったため、解の時刻 t は最高点に達する時刻になる。
$D = v_0^2 - 2gh < 0$ の場合は、現実の t は存在しない。h が高すぎて、小球が届かない場合である。

1.3.2　3 次方程式

3 次方程式を $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とすると、これらの解の間には次の関係が成立する。

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \qquad \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \gamma + \gamma \cdot \alpha = \frac{c}{a} \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \tag{1.22}$$

3 次方程式の解の公式 (Cardano の公式)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

この式を 2 次の項を含まない形に変換する。

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

ここで、$x = y - r/3$ と置いて、上の式に代入すると、

$$y^3 + py + q = 0 \text{（3 次方程式の被約形）} \quad , \quad p = s - r^2/3 \ , \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t$$

ここで、

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad , \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

1 の虚立方根を $\omega_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad , \quad \omega_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \qquad i \equiv \sqrt{-1}$
とおくと、3 次方程式の被約形の根は

$$y_1 = u_1 + v_1 \ , \ y_2 = u_1\omega_1 + v_1\omega_2 \ . \ y_3 = u_1\omega_2 + v_1\omega_1$$

1.3.3　高次方程式の解法

- **剰余定理**：整式 $f(x)$ を、一次式 $x - a$ で割ったとき、その余り R は $R = f(a)$ である。
- **因数定理**：整式 $f(x)$ を一次式 $x - a$ で割ったとき、割り切れるならば $f(a) = 0$ である。また、整式 $f(x)$ が一次式 $ax + b$ で割り切れるならば、$f(-\dfrac{b}{a}) = 0$ である。

- **高次方程式の解法**

  1. 与えられた方程式を一方の辺に移項し、$F(x) = 0$ の形にする。
  2. 因数分解の公式、因数定理、置き換えなどを利用して、$F(x)$ を因数分解する。
  3. 因数分解で得られた 2 次以下の方程式を解く

1.3.4 不等式の性質

不等式の性質

- 不等式の両辺に同じ数または同じ式を加えても、同じ数または同じ式を引いても不等号の向きは変わらない。
- 不等式の両辺に同じ正の数を掛けても、両辺を同じ正の数で割っても不等号の向きは変わらない。
- 不等式の両辺に同じ負の数を掛けたり、または、同じ負の数で割ったりすると、不等号の向きは変わる。

1.3.5 ２次不等式の解

実数を係数とする２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ の実数解を α、β とし、判別式を $D = b^2 - 4ac$ とするとき、２次不等式の解について、表 (1.3) に示す。

問題 次の不等式を解け

$$(1)\ 3x^2 + 4x - 4 < 0 \qquad (2)\ 2x^2 - 4x + 1 \geqq 0$$

（解 (1) $-2 < x < \dfrac{2}{3}$ (2) $x \leqq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \leqq x$）

表 1.3: ２次不等式の解の分類

$\alpha > 0,\ \alpha > \beta$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x < \alpha \ \ \beta < x$	$\alpha (= \beta)$ 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c \geqq 0$	$x \geqq \alpha \ \ \beta \geqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c < 0$	$\alpha < x < \beta$	解なし	解なし
$ax^2 + bx + c \leqq 0$	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x = \alpha$	解なし

1.3.6 主な不等式

- $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ のとき、$\dfrac{a+b}{2}$(相加平均) $\geqq \sqrt{ab}$(相乗平均)（等号は $a = b$ のときに成り立つ。）
- $a > 0, b > 0$ のとき、$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

- $|a+b| \geqq |a|+|b|$（等号は $ab \geqq 0$ のときに成り立つ。）
- $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$（等号は $a=b=c$ のときに成り立つ）
- $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqq (ac+bd)^2$（等号は $ad=bc$ のときに成り立つ。）
- $a \geqq 0$ ， $b \geqq 0$ ， $c \geqq 0$ のとき,

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

第2章　ベクトルとスカラー

2.1　ベクトルとスカラー

2.1.1　ベクトルとは

力、速度、加速度、運動量、力積、角運動量などのように、**向き**と大きさで定まる量をベクトルという。長さ、時間、温度、エネルギーなどのように大きさだけで定まる量をスカラーという。

ベクトルの記法

線分ＡＢに点Ａから点Ｂへ向かう向きをつけて考えたとき、これを有向直線という。点Ａを始点、点Ｂを終点という。有向直線の向きがベクトルの向き、有向直線の長さがベクトルの大きさを表すと決めると、ベクトルはある有向直線で表される。有向直線で表されるベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と書く (図 2.1)。

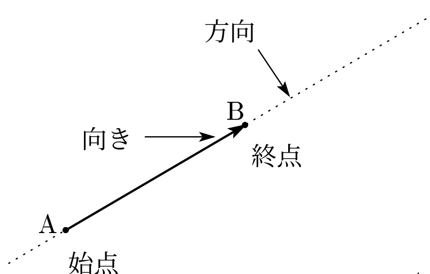


図 2.1: ベクトル

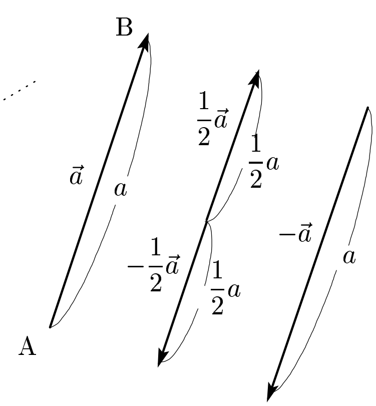


図 2.2: ベクトルとスカラーの積

ベクトルの相等

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{有向線分ＡＢを平行移動して、有向} \\ \text{線分ＣＤに重ね合わせることできる。} \end{array} \right\}$$

この定義から

- １つのベクトル $\vec{a}$ を有向線分を用いて表すときには、どの点を始点として取っても良い。

- 有向線分が向きと長さを不変に保ったまま自由に位置を変えられるのがベクトルである。

- ベクトル $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ の大きさをそれぞれ $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$ で表す。特に大きさ１のベクトルを**単位ベクトル**という。

- $\vec{a}$ に対して、大きさが等しく向きが反対のベクトルを、$\vec{a}$ の逆ベクトルといい、$-\vec{a}$ で表す (図 2.2)。
  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき、$-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$

- 始点と終点の一致したベクトルを零ベクトルといい、記号 $\vec{0}$ と表す。零ベクトルの大きさは零で、向きは考えない。
  零ベクトルの性質
  1. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = 0$
  2. $|\vec{0}| = 0$
  3. $-\vec{0} = \vec{0}$
  4. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

2.2　ベクトルの演算

2.2.1　ベクトルの加法

２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ があるとき、この２つのベクトルの和（合成）を考える。作図で求める方法としては三角形法と平行四辺形法とがある。
三角形法（図 2.3）

1. 任意の点Ａをとり、ベクトル $\vec{a}$ を平行移動し、$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ となる点をＢとする。
2. ベクトル $\vec{b}$ を平行移動し、点Ｂを始点とするベクトルが $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ の関係を満たす点Ｃを求める。
3. 点Ａから点Ｃに引いた有向線分 $\overrightarrow{AC}$ がベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の和（合成）である。

平行四辺形法（図 2.4）

1. 任意の点Ａをとり、この点が始点になるように２つのベクトルを平行移動して、$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ および $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ となる点Ｂ、Ｃを求める。
2. ＡＢ、ＡＣを２辺とする平行四辺形ＡＢＣＤを作り、点Ｄを求める。
3. 有向線分 $\overrightarrow{AD}$ が求めるベクトルになる。

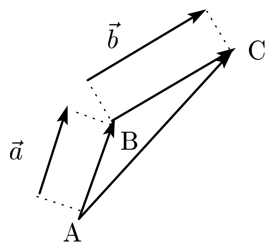


図 2.3: 三角形法

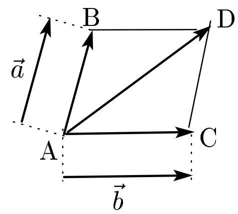


図 2.4: 平行四辺形法

ベクトルの和の性質

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

2.2.2 ベクトルの分解

１つのベクトルを２つ以上のベクトルの和に表すことをベクトルの分解という。まず１つのベクトルを２つのベクトルの和に表すことを考える。（図 2.5）

1. $\vec{a}$ を平行移動して、始点を点Ａに移動する。$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ となる点Ｂを求める。
2. 点Ａを通り、分解したい方向に２本の直線を引く。
3. ＡＢが対角線になり。かつ２本の直線が平行四辺形ＡＣＢＤの２辺になるような点Ｃ、Ｄを求める。
4. 有向線分 $\overrightarrow{AC}$ および $\overrightarrow{AD}$ が求めるベクトルで、$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ となる。
5. ３つ以上に分解するときはこの手続きを繰り返していく。

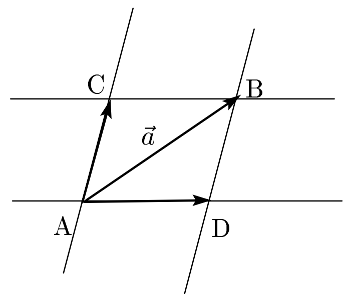


図 2.5: ベクトルの分解

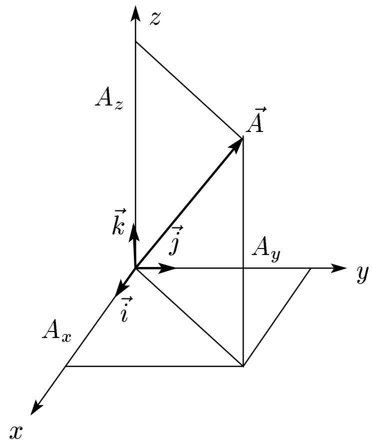


図 2.6: 基本ベクトルおよび $\vec{A}$ の成分

問題

水平面と角 θ をなすあらい斜面の上に質量 m の物体をおいたとき、この物体に作用する重力を斜面に平行な成分と、垂直な成分に分解し、つり合いの式を立てよ。

右図のように、重力の斜面に垂直な成分は大きさが $mg\cos\theta$ で、向きは斜面に垂直で下向き、斜面に平行な成分は大きさが $mg\sin\theta$、向きは斜面に沿って下向き。斜面に垂直な成分は斜面からの垂直抗力 N とつり合い、水平な成分はまさつ力 F とつり合う。よって、次の式が成り立つ。

$N = mg\cos\theta \quad , \quad F = mg\sin\theta$

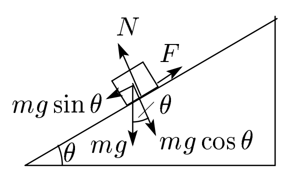


図 2.7: 斜面上の物体に作用する重力の成分

基本ベクトル

原点Oで互いに直交する 3 本の数直線を考える。この直線を座標軸といい、おのおのｘ軸、ｙ軸、ｚ軸という。いま、座標軸が定められた空間で、$\mathrm{E}_1(1,0,0)$,$\mathrm{E}_2(0,1,0)$,$\mathrm{E}_3(0,0,1)$ をとり、$\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}, \vec{j} = \overrightarrow{OE_2}, \vec{k} = \overrightarrow{OE_3}$ とすると、$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ はそれぞれｘ軸、ｙ軸、ｚ軸の正の方向と同じ向きを持つ単位ベクトルである。これらを基本ベクトルという。（図 2.6）

2.2.3　ベクトルの記述法

$\vec{A}$ を任意のベクトルとすると、$\vec{A}=\overrightarrow{OA}$ となる点Aをとり、Aの座標を (A_x, A_y, A_z) とすると、

$$\vec{A}=\overrightarrow{OA}=(A_x, A_y, A_z)=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k} \tag{2.1}$$

と表される。このとき実数 A_x, A_y, A_z をベクトル $\vec{A}$ の成分という。A_x,A_y,A_z をそれぞれ $\vec{A}$ のｘ成分、ｙ成分、ｚ成分という。この成分を用いると、ベクトル $\vec{A}$ の大きさは

$$|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \tag{2.2}$$

となる（図 2.6)。

2.2.3.1　ベクトルの相等・和・差・実数倍

２つのベクトル $\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$
, $\vec{B}=(B_x, B_y, B_z)=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$ については次のことが成立する。

- ２つのベクトルが等しい（相等）とは、

$$(A_x, A_y, A_z)=(B_x, B_y, B_z) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A_x=B_x \\ A_y=B_y \\ A_z=B_z \end{cases}$$

- ２つのベクトルが平行であるためには、

$$A_x : A_y : A_z = B_x : B_y : B_z \quad , \quad \frac{A_x}{B_x}=\frac{A_y}{B_y}=\frac{A_z}{B_z}$$

- ２つのベクトルの和（差）は

$$\begin{aligned}\vec{A}\pm\vec{B} &= (A_x\pm B_x, A_y\pm B_y, A_z\pm B_z) \\ &= (A_x\pm B_x)\vec{i}+(A_y\pm B_y)\vec{j}+(A_z\pm B_z)\vec{k}\end{aligned} \tag{2.3}$$

- k を実数とすると、ベクトル $\vec{A}$ の実数倍は

$$k\vec{A}=(kA_x, kA_y, kA_z)=kA_x\vec{i}+kA_y\vec{j}+kA_Z\vec{k} \tag{2.4}$$

以上のことをまとめると、

k は実数、$\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B}=(B_x, B_y, B_z)$ とするとき、
$\vec{A}\pm\vec{B}=(A_x\pm B_x, A_y\pm B_y, A_z\pm B_z)$
$\quad=(A_x\pm B_x)\vec{i}+(A_y\pm B_y)\vec{j}+(A_z\pm B_z)\vec{k}$
$k\vec{A}=(kA_x, kA_y, kA_z)$

物理への応用（速度の合成）
ある乗り物が地面に対して速度 $\vec{V}$ で運動していた。この乗り物の上を子供が乗り物に対して速度 $\vec{v}$ で移動しているとき、地面に立っている人が見たとき、この子供の速度 $\vec{u}$ は

$$\vec{u} = \vec{V} + \vec{v}$$

となる。

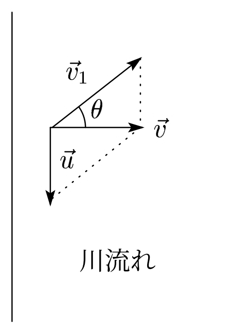
物理への応用（相対速度）
観測者Ａは地面に対して、速度 $\vec{V}_A$ で、観測者Ｂは地面に対して、速度 $\vec{V}_B$ で運動している。このとき、観測者Ａが観測する観測者Ｂの速度 $\vec{V}_{BA}$ は

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

である。

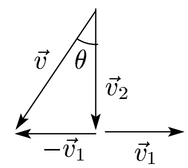
例題
静水に対して速さ v_1 で走ることが出来る船が、流速が u の川を船首を流れに直角に向けて進むとき、岸からみた船の速さ、および方向を求めよ。

静水に対する船の速度を $\vec{v}_1$、流れの速度を $\vec{u}$ とすると、求める船の速度 $\vec{v}$ は　$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{u}$ である。
求める船の速さは図より、$v = \sqrt{v_1^2 - u^2}$
船首の船の実際に進む向きとなす角 θ は　$\sin\theta = \dfrac{u}{v_1}$



例題
鉛直方向に速さ v_2 で降っている雨を、水平方向に速さ v_1 で走る電車に乗っている人には、雨滴の速さ、および方向はどのように見えるか。

電車の乗っている観測者から見た
雨滴の相対速度は $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
よって、図より、雨滴の速さは
$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
雨滴が鉛直となす角度は
$\tan\theta = \dfrac{v_1}{v_2}$
電車の進行方向とは逆の向きに傾いて見える。



2.2.3.2　２点を結ぶベクトル

2 点 A(a_x,a_y,a_z),B(b_x,b_y,b_z) に対して、

- 点Aから、点Bに至るベクトルは

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$$

- ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさは

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

問題
$\vec{A} = (-1, 0, 1) = -\vec{i} + \vec{k}, \vec{B} = (2, 3, 2) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ とするとき、次のベクトルを求めよ。

(1)$\vec{A} + \vec{B}$　(2)$\vec{A} - \vec{B}$

（解 (1)$(1, 3, 3) = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$　(2)$(-3, -3, -1) = -3\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$）

2.2.4　スカラー積

二つのベクトルを $\vec{A}$、$\vec{B}$ のなす角を θ とし、その大きさを A と B とする。

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \tag{2.5}$$

をベクトル $\vec{A}$ および $\vec{B}$ のスカラー積または内積という。
スカラー積の性質

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$　（交換則）
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$　（分配則）

- (基本ベクトル間のスカラー積)

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1 \tag{2.6}$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0 \tag{2.7}$$

- $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$　$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$ とするとき、

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{2.8}$$

- $\vec{A}$ と $\vec{B}$ とのなす角を θ とするとき、

$$\cos\theta=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}} \tag{2.9}$$

- $\vec{A}\perp\vec{B}=0$ ならば、$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

問題

$\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\vec{B}=-5\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1)$\vec{A}$ と $\vec{B}$ のなす角 θ を求めよ。

(2)$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})$ を計算せよ。

(3)$\vec{A}$ と同じ方向・向きを持つ単位ベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(解　(1)　$\theta=90^\circ$　(2)　-13　(3)　$\vec{n}=\dfrac{\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{14}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

物理への応用（仕事）

物体に F[N] の力を作用させて、力の方向に、距離 s[m] だけ移動させたとき、力のした仕事は

$$W=Fs[J]$$

で与えられる。力の方向と移動方向が一致していないとき、

$$W=Fs\cos\theta=\vec{F}\cdot\vec{s}[\mathrm{J}]$$

角 θ は、力 $\vec{F}$ の方向と移動の方向、向きを表す変位 $\vec{s}$ のなす角度である。

問題
次の場合の仕事を求めよ。
（1）5.0[N] の力で、質量 3.0[kg] の物体を力の方向に 2.0[m] 静かに移動させた。力のした仕事はいくらか
（2）力 $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$[N] で、原点 O にある物体を直線的にかつ、静に点 P(1,1,1)[m] まで移動させた。力のした仕事はいくらか

(解 (1) 仕事＝ 5.0[N] × 2.0[m] = 10[J] (2) 仕事＝ $\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 6$[J])

2.2.5 ベクトル積

定義
ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ とが与えられたとき、大きさが $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ で、方向が $\vec{A}$ および $\vec{B}$ にも垂直で、向きは $\vec{A}$ から $\vec{B}$ に（180° より小さい角度で）回す場合、右ねじの進む向きのベクトルをベクトル $\vec{A}$,$\vec{B}$ のベクトル積といい、$\vec{A} \times \vec{B}$ で表す。

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\vec{e} \tag{2.10}$$

$\vec{e}$ は上に述べた方向と向きをもつ単位ベクトルである（図 2.8,2.9)。

ベクトル積の性質

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
- $\vec{A} // \vec{B}$ ならば、$\vec{A} \times \vec{B} = 0$

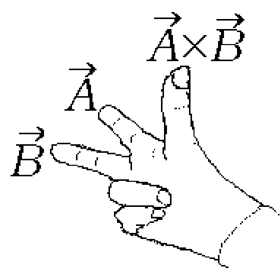


図 2.8: $\vec{A} \times \vec{B}$ の向き

- 基本ベクトル間のベクトル積

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 & (2.11) \\ \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} & \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j} & (2.12) \end{aligned}$$

- $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ および $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ とするとき、

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} \tag{2.14}$$

物理への応用（角運動量）

質量 m の質点が速度 $\vec{v}$ で運動しているとき、質量と速度をかけた物理量を運動量という。運動量を $\vec{p}$ で表すと、$\vec{p} = m\vec{v}$ と表記する。いま、ある点Oからの位置が $\vec{r}$ の点に質量 m の質点が速度 $\vec{v}$ で動いているとき、次の式で表される物理量 $\vec{L}$ を点Oのまわりの角運動量（angular momentum) という。

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = \vec{r}\times\vec{p}$$

問題

xy 平面内で質量 m の質点が半径 r の円周上を速さ v で等速円運動している。
角運動量 $\vec{L}$ の向きと大きさを求めよ。

（解　大きさは $L_z = mrv$（一定）　向きはz軸の正の向き）

物理への応用（ローレンツ力）

電場 $\vec{E}$、磁場 $\vec{B}$ の中を速度 $\vec{v}$ で運動する電荷 q の荷電粒子には、電場、磁場から力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

が働く。右辺第二項がベクトル積で表されている。
この力 $\vec{F}$ を**ローレンツ力**という

問題
（１）$\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{B}=-\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$ のとき、$\vec{A}\times\vec{B}$ を計算せよ。
（２）ｘ軸の正の向きに大きさが E の電場、ｙ軸の正の向きに大きさが B の磁場が作用している空間がある。次の場合について、電荷 q の荷電粒子が受ける力の大きさと向きを求めよ。
(2-1)　原点で静止している場合
(2-2)t のとき、ｘ軸上を正の向きに速さ V で動いている場合

（解（１）$\vec{A}\times\vec{B}=-10\vec{i}-11\vec{j}+3\vec{k}$）
(解 (2-1) $\vec{F}=qE\vec{i}$　 (2-2)$\vec{F}=qE\vec{i}+qVB\vec{k}$)

2.2.6 ベクトルの三重積

スカラー三重積の定義
$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$, $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$, $\vec{C}=C_x\vec{i}+C_y\vec{j}+C_z\vec{k}$
とするとき、(右辺の行列式の計算方法は第１２章第２節参照)

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

スカラー三重積の性質

- $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ の絶対値は $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ を３辺とする平行六面体の体積を表す (図 2.10)。
- $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$
- 三つのベクトル $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ のいずれか二つが平行か、または三つのベクトルが同一平面上にあるときは
  $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$

問題　$\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}, \vec{B}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}, \vec{C}=-\vec{i}-\vec{k}$ のとき、$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ を求めよ。

（解 0）

ベクトル三重積

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$
$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$
$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=[\vec{A},\vec{B},\vec{D}]\vec{C}-[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\vec{D}$
ここで、$[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\equiv\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ である。

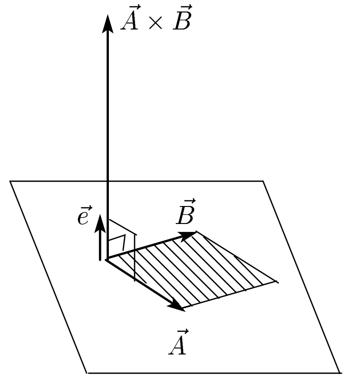


図 2.9: ベクトル積

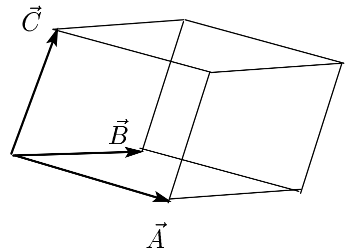


図 2.10: スカラー三重積

2.3　ベクトルの微分

2.3.1　ベクトル関数とその微分

ベクトル $\vec{A}$ が一変数 t の関数であるとき、すなわち、ベクトル $\vec{A}$ の大きさ、或いはその方向、またはその 2 つの量が変数 t の値に応じて、変化するとき、$\vec{A}(t)$ と記し、ベクトル関数と呼ぶ。成分で表すと、

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k} \tag{2.16}$$

となる。
いま、変数 t が t_1 から、$t_1 + \Delta t$ まで変化したとき、ベクトル $\vec{A}$ は $\vec{A}(t_1)$ から $\vec{A}(t_1 + \Delta t)$ まで変化する。
$\Delta\vec{A} = \vec{A}(t_1 + \Delta t) - \vec{A}(t_1)$ とおくと、$\Delta t \neq 0$ のとき、$\dfrac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$ は $\Delta\vec{A}$ と同じ方向、向きを持つ。
ここで、Δt を 0 に近づけていったときに、$\dfrac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$ の極限値が存在するとき、この極限値を変数 t の値が t_1 のときのベクトル関数 $\vec{A}(t)$ の微分係数といい、$\dfrac{\vec{A}(t_1)}{dt}$ で表す。すなわち、

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} \tag{2.17}$$

ここで、微分係数 $\dfrac{d\vec{A}(t_1)}{dt}$* は、ベクトル $\vec{A}(t_1)$ とは大きさも、方向、向きも異なるかもしれない新しいベクトルである。
(2.16) より、成分で書くと

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z(t)}{dt}\vec{k} \tag{2.18}$$

* $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ を計算し、変数 t に値 t_1 を代入した値である。$\left[\dfrac{d\vec{A}(t)}{dt}\right]_{t=t_1}$ と書くこともある。

となる。

ベクトル微分の規則

スカラー関数を $\phi(t)$、２つのベクトル関数を各々$\vec{A}(t)$, $\vec{B}(t)$ とするとき、次の規則が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(\phi\vec{A}) = \phi\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\vec{A} \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} \tag{2.20}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} \tag{2.21}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} \tag{2.22}$$

2.3.2　物理への応用

2.3.2.1　一次元の運動

速度

x 軸上を動く物体の運動を考える。いま時刻 t_1 のときの位置が $X(t_1)$、時刻 t_2 のときの位置が $X(t_2)$ であたえられるとき、

$$\overline{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.23}$$

で計算した値は時刻 t_1 から、t_2 までの間に移動した距離 $X(t_2) - X(t_1)$ をその間に掛かった時間で割り算した値、すなわち、この間の平均の速度を求めたことになる。値が正のときは x 軸の正の方向に進んだことになる。

いま、時刻 t_1 での速度を求めようとすると、この平均速度の考え方の延長で求める。すなわち、時刻 t_1 から、$t_1 + \Delta t$ までの**平均の速度**の時間間隔 Δt を０に近づけた極限値をもとめ、それを、時刻 t_1 での速度とする。式で書くと、

$$\overline{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{x(t_1+\Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \left[\frac{dx(t)}{dt}\right]_{t=t_1}$$

加速度

x 軸上を動く物体の運動を考え、いま時刻 t_1 のときの速度が $V(t_1)$、時刻 t_2 のときの速度が $V(t_2)$ であたえられるとき、

$$\overline{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.24}$$

で計算した値は時刻 t_1 から、t_2 までの間に変化した速度 $v(t_2) - v(t_1)$ をその間に掛かった時間で割り算した値、すなわち、この間の**平均の加速度**を求めたことになる。値が正のときは x 軸の正の方向に速さが増加していることになる。

いま、時刻 t_1 での加速度を求めようとすると、この平均加速度の考え方の延長で求める。すなわち、時刻 t_1 から、$t_1+\Delta t$ までの平均加速度の時間間隔 Δt を 0 に近づけた極限値をもとめ、それを、時刻 t_1 での加速度とする。式で書くと、

$$\overline{a}(t_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_1+\Delta t)-v(t_1)}{\Delta t}=\left[\frac{dv(t)}{dt}\right]_{t=t_1}=\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right]_{t=t_1}$$

$\overline{a}$ が正の値を持つときは、物体は x 軸の正方向に速さを増している状態である。

2.3.3　三次元の運動

三次元空間内で、物体が曲線 C の上を動くとする。曲線 C 上の点は時間 t の関数として、位置ベクトル $\vec{r}(t)$ で表す。いま、時刻 t のときの曲線 C 上の点の座標を $(x(t),y(t),z(t))$ とすると、位置ベクトルは

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \tag{2.25}$$

いま、時刻 t には点 P に、時刻 $t+\Delta t$ には点 Q に物体があるとする。ベクトル $\overline{PQ}$ は、$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$ で与えられる。点 Q が曲線 C 上を点 P に近づいていくと、

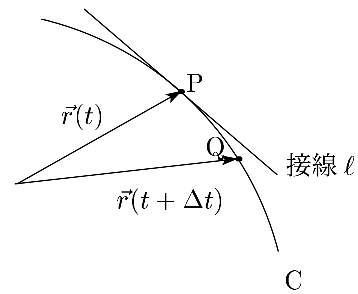


図 2.11: 3 次元運動

$\Delta\vec{r}$ は曲線の点 P での接線 ℓ の方向を向く。その極限は

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{2.26}$$

と書くことができ、このベクトルは点 P における曲線 C の接線ベクトルである。すなわち、速度ベクトル $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ は点 P での瞬間的な運動の方向を表している。そしてそのベクトルは点 P での接線の方向と一致している。
成分で書くと、

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{2.27}$$

速度の大きさを速さというが、速さは

$$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{2.28}$$

である。

加速度

時刻 t のときの速度を $\vec{v}(t)$、時刻 $t+\Delta t$ のときの速度を $v(t+\Delta t)$ とすると、時刻 t のときの加速度は

$$\vec{a} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \tag{2.29}$$

問題

原点を中心とした半径 a の円周上を角速度 ω で等速運動する質量 m の物体がある。t 秒の時の位置 P の座標は $(a\cos\omega t\ \ ,\ \ a\sin\omega t)$ とする。位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r}(t) = a\cos\omega t\ \vec{i} + a\sin\omega t\ \vec{j}$ と表すことができる。次の問に答えよ。

（１）t 秒の時の速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。

（２）t 秒の時の加速度 $\vec{a}(t)$ を求めよ。

（３）速度が常に動径（OP) に垂直であることを示せ

解　(1) $\vec{v}(t) = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + a\omega\cos\omega t\vec{j}$

(2) $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t\vec{i} - a\omega^2\sin\omega t\vec{j}$

(3) $\vec{v}(t)\cdot\vec{r}(t) = -a^2\omega(\sin\omega t\cos\omega t - \cos\omega t\sin\omega t) = 0$

第3章　図形と方程式

3.1　平面上の点の座標・距離

点P (x_1, y_1, z_1) と点Q (x_2, y_2, z_2) について、

- 距離 $\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
- ベクトル $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$
- 線分PQを $m : n$ に内分する点Rの座標 (x_R, y_R, z_R) は
$\left(\dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}, \dfrac{nz_1 + mz_2}{m+n}\right)$

内分点の例を２次元平面について図示する。点P (x_1, y_1)、点Q (x_2, y_2) を $m : n$ に内分する点R (x_R, y_R) は右図のようになる。

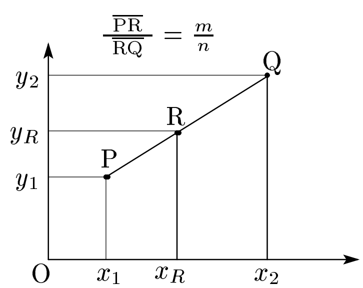


図 3.1: ２点間PQを $m : n$ に内分する点R

3.2　直線の式

- ｘｙ平面上での直線の式
傾き m ｙ、切片 b の直線の式は $y = mx + b$
- 点 (x_1, y_1) をとおり傾き m がの直線の式は $y = m(x - x_1) + y_1$
- ２点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) とを通る直線の方程式は
$x_1 \neq x_2$ のときは、$y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$
$x_1 = x_2$ のときは、$x = x_1$

物理への応用（重心）

n 個の質量がそれぞれ、$m_1, m_2, \cdots, m_N$ である質点が位置 $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_N}$ にあるとき、重心の座標は

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + \cdots + m_N\vec{r_N}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$

成分で表現すると、

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_kx_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}$$

$$Y = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_ky_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} \quad , \quad Z = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_kz_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}$$

ここで、$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \vec{r}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j} + z_k\vec{k}$ とする。

問題

いま、点A $(x_1, 0, 0)$ に質量 m_1 の質点があり、点B $(x_2, 0, 0)$ に質量 m_2 の質点があるとき、この２つの質点の重心の位置を求めよ。
この重心の位置はＡＢ間を質量の逆比 $\dfrac{1}{m_1} : \dfrac{1}{m_2} = m_2 : m_1$ に内分する点になっていることを確かめよ。

$\left(\text{解}\quad X_G = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right)$

3.3　２直線の位置関係

２直線 $y = mx + b$ と $y = m'x + b'$ について、
$m = m' \iff$ 平行
$mm' = -1 \iff$ 垂直

3.4　点と直線との距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

3.4.1　点と直線との距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離は　$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

問題
(1) ２点Ｐ $(-2,5)$、Ｑ $(4,-1)$ 間の距離 $\overline{PQ}$ を求めよ。
(2) 線分ＰＱを２：１の比に内分する点をＲ (x,y) とするとき、点Ｒの座標を求めよ。
(3) 点 $(1,2)$ と直線 $3x+4y+4=0$ の距離を求めよ。

(**解**　(1)　$6\sqrt{2}$　(2)　$(2,1)$　(3)　3　)

3.5　放物線

定直線（準線）と、その上にない定点（焦点）からの距離が等しい点の軌跡である。放物線 $y^2=4px$ の焦点 $(p,0)$、準線は $x=-p$ となる。式 $y=ax^2+bx+c$ は $a>0$ のときは下に凸な、$a<0$ のときは上に凸な放物線を表す。
$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ の形に変形したとき、$x=-\dfrac{b}{2a}$ を放物線の軸、$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$ を放物線の頂点という（図 3.2）。

物理への応用（投げ上げ）
重力が作用している空間で、高さ y_0[m] から、速さ V_0[m/s] で真上に投げ上げた物体の t 秒後の高さ y[m] を求めよ。

t 秒のときの高さ y は

$$y=y_0+V_0\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

で与えられる。ここで、g [m/s^2] は重力加速度の大きさである。
この式を変形すると、

$$y=-\frac{1}{2}g\left(t-\frac{V_0}{g}\right)^2+\frac{V_0^2}{2g}+y_0$$

よって、時刻 $t=\dfrac{V_0}{g}$[s] のとき、y_0 からの高さ $H=\dfrac{V_0^2}{2g}$[m] で最高点に達する。

物理への応用（斜方投射）
水平面と仰角 θ をなす方向に初速度 V_0 で投げ出された物体の軌跡と最高点の位置を求めよ。

t 秒後の位置は投げ出した点からの水平距離を x、高さを y とすると、

$$x = V_0 \cos\theta \cdot t \quad , \quad y = V_0 \sin\theta \; t - \frac{1}{2} g t^2$$

とあらわされる。ここで、g は重力加速度の大きさを表す。
これらの式から時刻 t を含まない形の式をつくると、

$$y = \tan\theta \; x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

となる。この式を変形すると、

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} \left(x - \frac{V_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \right)^2 + \frac{V_0^2 \sin\theta}{2g}$$

となり、この放物線の頂点は

$$\left(\frac{V_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \;\; , \;\; \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g} \right)$$

であることが分かる。

3.6　無理関数

$y = \sqrt{f(x)}$ の関数を無理関数という。いま、$f(x)$ が変数 x の一次関数の時を考える（図 3.3）。

3.7　指数関数

a をある正数とすると、a^x を指数関数という。一般には $a = e = 2.718\cdots$（自然数）の場合を指数関数と呼ぶ（図 3.4）。指数関数について次のことが

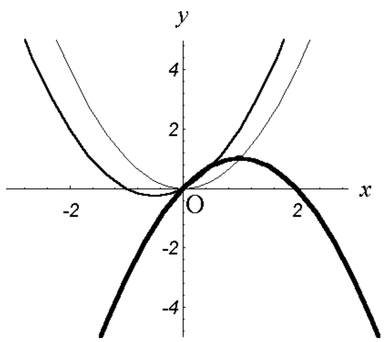


図 3.2: 放物線
細線：$y = x^2$
中太線：$y = x^2 + x$
太線：$y = -x^2 + 2x$

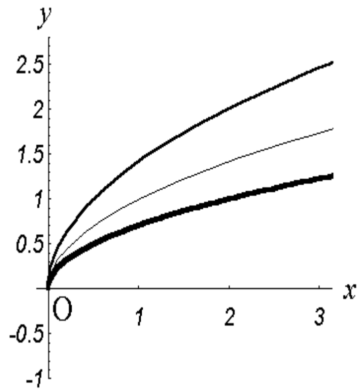


図 3.3: 無理関数のグラフ
細線：$y = \sqrt{x}$、
中太線：$y = \sqrt{2x}$、
太線：$y = \sqrt{\frac{1}{2}x}$

成り立つ。

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \tag{3.1}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \tag{3.2}$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \\ &\quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \tag{3.5}$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{3.6}$$

3.8 対数関数

指数関数 $y = a^x$ を a を底とする指数関数という。この指数関数の逆関数を $y = \log_a x$ と表し、a を底とする対数関数という。x は正の数の範囲で変化する変数である（図 3.5）。
一般に $a = e$（自然数 $= 2.718\cdots$）のときは $y = \log x$ の形に書く。

対数関数の性質

$x, y, a, b, c > 0$ とするとき、

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \tag{3.7}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1) \tag{3.8}$$

$$\log xy = \log x + \log y \tag{3.9}$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \tag{3.10}$$

$$\log x^y = y \log x \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \\ &\quad (-1 < x < 1) \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \tag{3.13}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \tag{3.14}$$

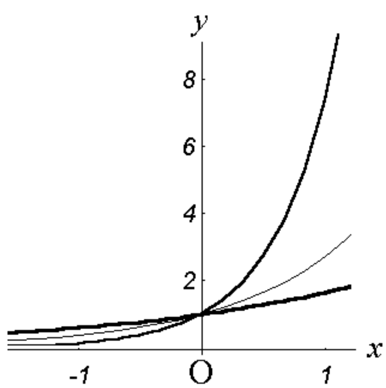


図 3.4: 指数関数のグラフ
細線：$y = e^x$
中太線：$y = e^{2x}$
太線：$y = e^{\frac{x}{2}}$

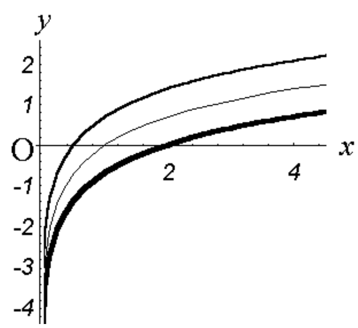


図 3.5: 対数関数のグラフ
細線：$y = \log x$
中太線：$y = \log 2x$
太線：$y = \log \frac{x}{2}$

3.9 双曲線関数

定義

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (3.15)$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3.16)$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (3.17)$$

双曲線関数の性質

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (3.18)$$

$\cosh x$ は偶関数、 $\sinh x$ は奇関数

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad (3.19)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad (3.20)$$

$\cosh x$ および $\sinh x$ のグラフは図 3.6,3.7 に描く。

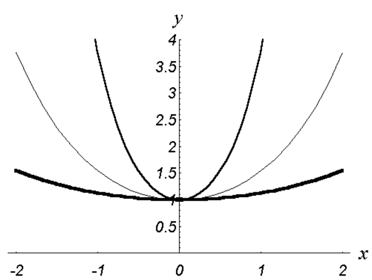


図 3.6: $y = \cosh x$ のグラフ
細線：$y = \cosh x$、
中太線：$y = \cosh 2x$、
太線：$y = \cosh \frac{1}{2}x$

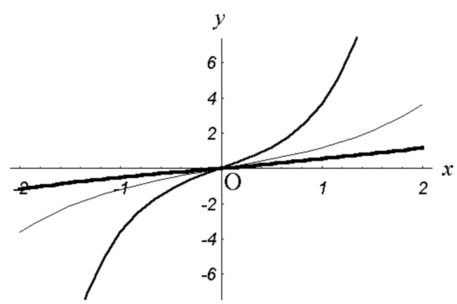


図 3.7: $y = \sinh x$ のグラフ
細線：$y = \sinh x$、
中太線：$y = \sinh 2x$、
太線：$y = \sinh \frac{1}{2}x$

3.10 楕円

２定点（焦点）からの距離の和が一定である点の軌跡が楕円である（図 3.8）。二次元平面での式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.21)$$

a,b の値に応じて次のようになる。

- $a > b > 0$ のとき、焦点（$\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0$) 長軸の長さ $2a$、短軸の長さ $2b$
- $b > a > 0$ のとき、焦点（$0, \pm\sqrt{b^2-a^2}$）長軸の長さ $2b$、短軸の長さ $2a$

媒介変数表示 $x = a\cos\theta$,$y = b\sin\theta \quad 0 < \theta < 2\pi$

3.11 双曲線

2 定点（焦点）からの距離の差が一定である点の軌跡を双曲線という（図 3.9)。二次元平面での式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \tag{3.22}$$

右辺の値に応じて次のようになる。

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のとき、焦点（$\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0$)、漸近式 $y = \pm\dfrac{b}{a}x$
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ のとき、焦点（$0, \pm\sqrt{a^2+b^2}$)、漸近式 $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

媒介変数表示
$x = \dfrac{a}{\cos\theta}, \quad y = b\tan\theta$

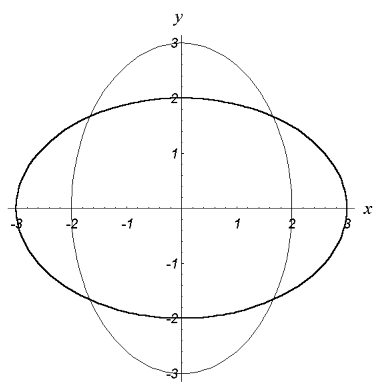


図 3.8: 楕円のグラフ
細線：$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = 1$
太線：$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$

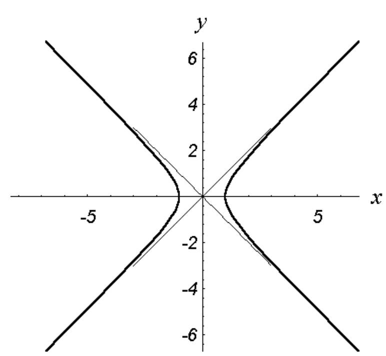


図 3.9: 双曲線
$x^2 - y^2 = 1$
原点を通る直線は漸近線

3.12 いろいろな曲線

サイクロイド： $x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t)$
星芒形（せいぼうけい）： $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Descartes の正葉形：　$x = \dfrac{3at}{1+t^3}$　$y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$　$x^3 - 3axy + y^3 = 0$
連珠形：　$r^2 = a^2 \cos 2\theta$　$x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$　$y = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$
心臓形：　$r = a(1+\cos\theta)$　$x = a(1+\cos\theta)\cos\theta$　$x = a(1+\cos\theta)\sin\theta$

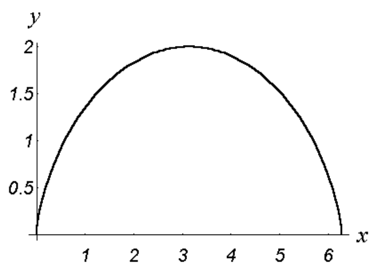


図 3.10: サイクロイド

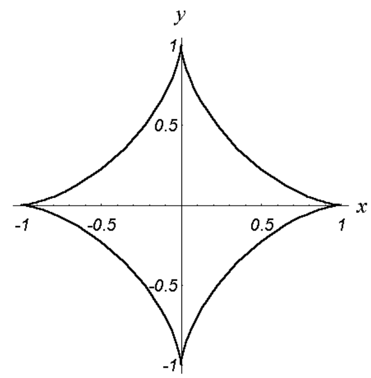


図 3.11: 星芒形

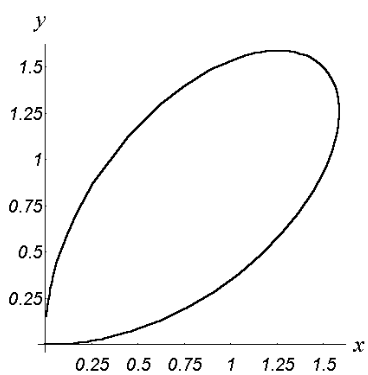


図 3.12: Descarte の正葉形

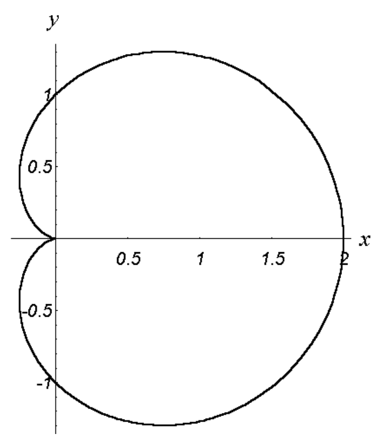


図 3.13: 心臓形 $r = 2(1+\cos\theta)$

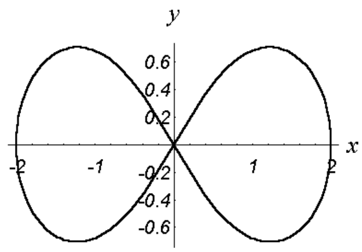


図 3.14: 連珠形 $r^2 = 2^2 \cos 2\theta$

$$x(\theta) = 2\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$$
$$y(\theta) = 2\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$$

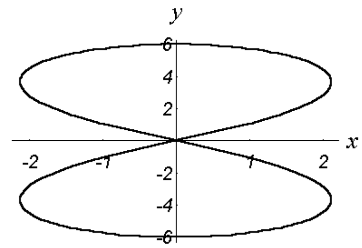


図 3.15: 連珠形 $r^2 = 6^2 \cos 2\theta$

$$x(\theta) = 6\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$$
$$y(\theta) = 6\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$$

第4章　数列

4.1　等差数列

数列 $\{a_k|k=0,\ldots n-1\}$ において、a_0 を初項、a_1 を第 1 項、a_k を第 k 項という。各項の差が一定の値のとき、この数列を等差数列という。
a_0 を初項、$d=a_{k+1}-a_k$ を公差という。一般項は　$a_n=a_0+(n-1)d$ となる。この数列の和 S_n は
$S_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=a_0+(a_0+d)+(a_0+2d)+\cdots+\{a_0+(n-1)d\}$

$$S_n=\frac{n(a_0+a_n)}{2}=\frac{n\{2a_0+(n-1)d\}}{2} \tag{4.1}$$

初項 $a_0=1$、公差 $d=1$ のとき、すなわち、

$$S_n=1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2} \tag{4.2}$$

4.2　等比数列

$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^k+\cdots+ar^{n-1}$
この各項の数列を等比数列という。このとき、r を公比という。一般項は　$a_n=ar^{n-1}$ となる。
この数列の和 S_n は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r\neq 1) \tag{4.3}$$

$$S_n = na \quad (r=1) \tag{4.4}$$

4.3 いろいろな数列

次の数列の和はよく使われる。

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2} \\
S_n &= 1+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (4.5)\\
S_n &= 1+2^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

4.4 数列の極限

数列の第 n 項が $n \to 0$ で限りなくある値 α に近づくとき、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するという。これを次のように表す。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

いま、２つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が各々α, β に収束するとき、次のことが成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$a_n < b_n \quad (n=1,2,\cdots) \text{ ならば、} \alpha < \beta$$

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n \ (n=1,2,\cdots) \text{ のとき、} \alpha=\beta \text{ ならば、} \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

無限等比数列の極限

(4.3) は公比 r の値に応じて、次のようになる。

$$r>1 \text{ のとき、} \quad \lim_{n\to\infty} r^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

$$r=1 \text{ のとき、} \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

$$|r|<1 \text{ のとき、} \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

$$r<-1 \text{ のとき、} \quad \lim_{n\to 0} r^n = \text{振動}, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \text{発散}$$

第5章　空間図形

5.1　直線の方程式

5.1.1　空間直線

点A (a_1, a_2, a_3) を通り、ベクトル $\vec{d} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ に平行な直線の方程式は

- $\ell mn \neq 0$ の場合
  - 直線上の点をP、座標原点をOとすると、
    ベクトル方程式 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$
  - 媒介変数表示 $\begin{cases} x = a_1 + \ell t \\ y = a_2 + mt \\ z = a_3 + nt \end{cases}$
  - 方程式 $\dfrac{x - a_1}{\ell} = \dfrac{y - a_2}{m} = \dfrac{z - a_3}{n}$
- $\ell mn = 0$ の場合
  - いずれか一つが０のとき、例えばベクトル $\vec{d}$ のｘ成分が０のときは、ベクトルはｙｚ平面に平行である。よって、直線もｙｚ平面内にある。
    よって、直線の式は $\begin{cases} \dfrac{y - a_2}{m} = \dfrac{z - a_3}{n} \\ x = a_1 \end{cases}$
  - いずれか２つが０のとき、ベクトル $\vec{d}$ はある座標軸に平行になる。
    例えば、$\ell = m = 0$ ならば、０でない成分、ｚ成分のｚ軸に平行になる。
    よって、直線の式は $\begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \end{cases}$

5.1.2　２点を通る直線の方程式

空間の異なる２点A (a_1, a_2, a_3)、およびB (b_1, b_2, b_3) を通る直線の方程式は

- ベクトル方程式は $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$（$t$ は実数のパラメーターである。）
- $(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3) \neq 0$ のとき、方程式は $\dfrac{x-a_1}{b_1-a_1} = \dfrac{y-a_2}{b_2-a_2} = \dfrac{z-a_3}{b_3-a_3}$

5.1.3　２直線の間の関係

$$2\text{直線}\begin{cases} \mathrm{g}\ : & \dfrac{x-a_1}{\ell_1} = \dfrac{y-a_2}{m_1} = \dfrac{z-a_3}{n_1} \\ \mathrm{h}\ : & \dfrac{x-b_1}{\ell_2} = \dfrac{y-b_2}{m_2} = \dfrac{z-b_3}{n_2} \end{cases}$$

が次の関係を満たすとき、２直線は平行、あるいは垂直であるという。

- **平行** $\iff \ell_1 : \ell_2 = m_1 : m_2 = n_1 : n_2 \quad \iff \dfrac{\ell_1}{\ell_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$
- **垂直** $\iff \quad \ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

5.1.4　２直線のなす角

直線 g , h の２直線のなす角度を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

5.2　平面

5.2.1　平面の方程式

ベクトル $\vec{n} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ に垂直で、点A (a_1, a_2, a_3) を通る平面の方程式は、座標原点をO、平面上の点をPとすると、

$$\begin{cases} \text{ベクトル方程式は } (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{n} = 0 \\ \text{x,y,z を用いる方程式は } \ell(x-a_1) + m(y-a_2) + n(z-a_3) = 0 \end{cases}$$

5.2.2　２平面のなす角

２平面 $\alpha : \ell x + my + nz + d = 0$　法線ベクトル $\vec{n} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$
$\beta : \ell' x + m' y + n' z + d' = 0$　法線ベクトル $\vec{n'} = \ell'\vec{i} + m'\vec{j} + n'\vec{k}$ に対して、2

平面のなす角すなわち各平面の法線ベクトルのなす角 θ は
$\cos\theta = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}||\vec{n'}|} = \dfrac{\ell\ell' + mm' + nn'}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}\sqrt{\ell'^2+m'^2+n'^2}}$

5.2.3 2平面の関係

上で定義した 2 平面 α, β が次の関係を満たすとき、2 平面は平行、または垂直であるという。

- **垂直** $\Longleftrightarrow \alpha \perp \beta \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'} = 0$ すなわち $\ell\ell' + mm' + nn' = 0$
- **平行** $\Longleftrightarrow \alpha \parallel \beta \Longleftrightarrow \ell : \ell' = m : m' = n : n'$ すなわち $\dfrac{\ell}{\ell'} = \dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'}$

5.2.4 点と直線の間の距離

点A (a_1, a_2, a_3) と平面 α:$\ell x + my + nz + d = 0$ との間の距離 L は
$L = \dfrac{|\ell a_1 + ma_2 + na_3|}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}$

第6章　三角関数

6.1　弧度法

定義：半径 r 中心角 θ の扇型の弧の長さを ℓ とするとき、大きさ $\theta = \dfrac{\ell}{r}$、単位はラジアン (rad)

参考

半径 r の球面上の或面積 S を球の中心Oから見込む角 Ω を立体角という。$\Omega = \dfrac{S}{r^2}$ で与えられ、単位はステラジアン [sr] を用いる。

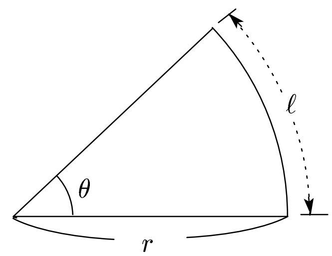


図 6.1: 弧度法
θ , r , ℓ の関係

表 6.1: 弧度法と度数法よる角の換算表

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度法 (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

6.2　三角関数の定義

直角三角形で、各辺の比を次のように定義する。

$$\text{正弦} = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \sin\theta \tag{6.1}$$

$$\text{余弦} = \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}} = \cos\theta \tag{6.2}$$

$$\text{正接} = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}} = \tan\theta \tag{6.3}$$

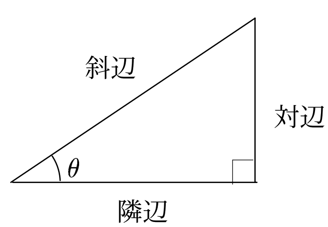


図 6.2: 直角三角形

表 6.2: 三角関数の符号

三角関数 \ 象限	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

表 6.3: 三角関数表

角度 θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$

次のような関数が定義されている。

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \tag{6.4}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \tag{6.5}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{6.6}$$

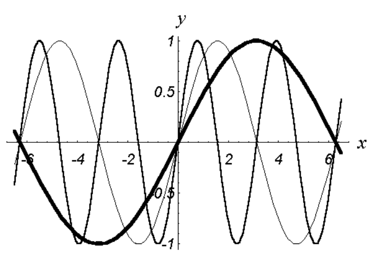


図 6.3: 正弦関数のグラフ
細線：$y = \sin x$、
中太線：$y = \sin 2x$、
太線：$y = \sin \frac{1}{2}x$

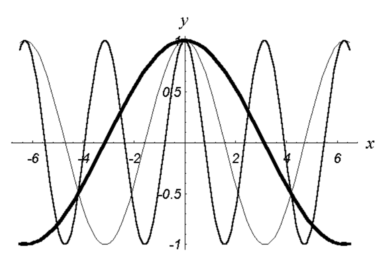


図 6.4: 余弦関数のグラフ
細線：$y = \cos x$、
中太線：$y = \cos 2x$、
太線：$y = \cos \frac{1}{2}x$

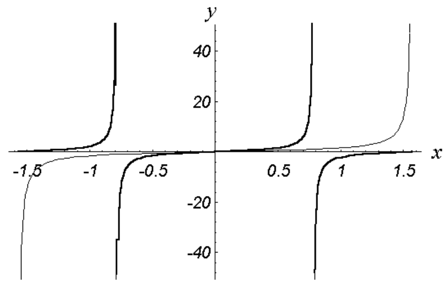


図 6.5: 正接関数のグラフ
細線：$y = \tan \frac{1}{2}x$、
太線：$y = \tan x$

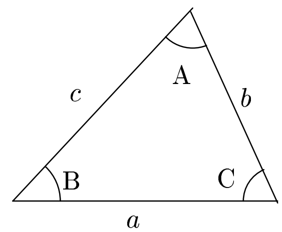


図 6.6: 三角形ＡＢＣ

6.3　諸々の関係式

- **三角関数の偶奇性**

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta\ ,\ \cos(-\theta) = \cos\theta\ ,\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \tag{6.7}$$

- **三角関数の相互関係**

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{6.8}$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{6.9}$$
$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \tag{6.10}$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \quad , \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta, \tag{6.11}$$
$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \quad , \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \tag{6.12}$$
$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \quad , \quad \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan\theta} \tag{6.13}$$

- **正弦定理・余弦定理**

ΔABC において、（図 6.6）

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \tag{6.14}$$
$$a = b\cos C + c\cos B \tag{6.15}$$
$$b = c\cos A + a\cos C \tag{6.16}$$
$$c = a\cos B + b\cos A \tag{6.17}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \tag{6.18}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \tag{6.19}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{6.20}$$

- **三角形の面積**

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C \tag{6.21}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (s = \frac{a+b+c}{2}) \tag{6.22}$$

- **三角関数の加法定理**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{6.23}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{6.24}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \tag{6.25}$$

問題
次の式で表されるような波がある。
$y_1 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), y_2 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$.
この 2 つの波の合成波はどのように表されるか。

解　$y = y_1 + y_2 = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin 2\pi\frac{t}{T}$（定常波）

- **倍角の公式・半角の公式**

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{6.26}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{6.27}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \tag{6.28}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \tag{6.29}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \tag{6.30}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \tag{6.31}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \tag{6.32}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \tag{6.33}$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} \tag{6.34}$$

- **積を和に直す公式**

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \tag{6.35}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \tag{6.36}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)] \tag{6.37}$$

- **和を積に直す公式**

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \tag{6.38}$$
$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \tag{6.39}$$
$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \tag{6.40}$$
$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \tag{6.41}$$

- **三角関数の合成**

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \tag{6.42}$$

ここで、$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおいた。

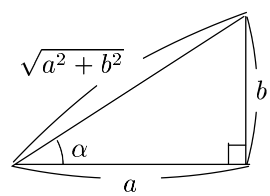


図 6.7: 直角三角形の辺の長さと角度の関係
a , b および α の関係

6.4　三角関数の導関数

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x \tag{6.43}$$
$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x \tag{6.44}$$
$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x} \tag{6.45}$$

6.5 逆三角関数

6.5.1 逆三角関数の定義

$y = \sin x$ の逆関数を $y = \sin^{-1} x = arc \sin x$ と書き、逆正弦関数という*。
$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ と限定した場合には、逆三角関数の主値という。
同様に逆余弦関数（$\cos^{-1} x$,arc cos x）、逆正接関数（$\tan^{-1} x$,arc tan x）が考えられる。これらの関数のグラフは図 6.8,6.9,6.10 に示す。

逆関数	関数の定義域	主値
$y = \sin^{-1} x$	$-1 \leqq x \leqq 1$	$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1} x$	$-1 \leqq x \leqq 1$	$0 \leqq y \leqq \pi$
$y = \tan^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

表 6.4: 逆三角関数の主値の定義域と関数値の範囲

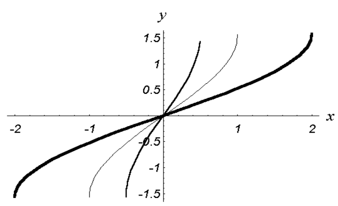


図 6.8: 逆正弦関数グラフ
細線：$y = \sin^{-1} x$
中太線：$y = \sin^{-1} 2x$
太線：$y = \sin^{-1} \frac{x}{2}$

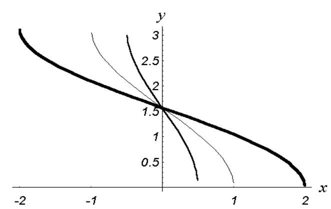


図 6.9: 逆余弦関数グラフ
細線：$y = \cos^{-1} x$
中太線：$y = \cos^{-1} 2x$
太線：$y = \cos^{-1} \frac{x}{2}$

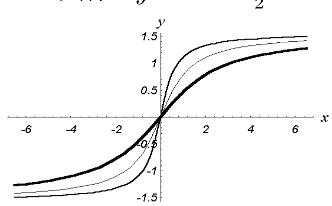


図 6.10: 逆正接関数グラフ
細線：$y = \tan^{-1} x$
中太線：$y = \tan^{-1} 2x$
太線：$y = \tan^{-1} \frac{x}{2}$

* **注意** $\sin^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\sin x}$ ではない。誤解しないように

6.5.2　逆関数の導関数

逆三角関数の主値について

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6.46}$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6.47}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \tag{6.48}$$

6.6　三角関数の有理関数の積分

6.6.1　積分公式

$$\int \sin\theta d\theta = -\cos\theta \tag{6.49}$$

$$\int \cos\theta d\theta = \sin\theta \tag{6.50}$$

$$\int \tan\theta d\theta = -\log|\sin\theta| \tag{6.51}$$

6.6.2　置換積分

三角関数の有理関数を積分するときには次の置換積分が有効である。

- $\int F(\cos\theta)\cos\theta d\theta \quad (\sin\theta = t)$ とおく。
- $\int F(\cos\theta)\sin\theta d\theta \quad (cos\theta = t)$ とおく。
- $\int F(\sin^2\theta, \cos^2\theta, \tan\theta)d\theta \quad (tan\theta = t)$ とおく。
- $\int F(\sin\theta, \cos\theta)d\theta \quad (\tan\frac{\theta}{2} = t)$ とおく。

漸化式

$$I_n = \int \sin^n\theta d\theta = \frac{1}{n}\left\{-\sin^{n-1}\theta\cos\theta + (n-1)I_{n-2}\right\} \tag{6.52}$$

$$I_n = \int \cos^n\theta d\theta = \frac{1}{n}\left\{\sin\theta\cos^{n-1}\theta + (n-1)I_{n-2}\right\} \tag{6.53}$$

$$I_n = \int \tan^n\theta d\theta = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}\theta - I_{n-2} \quad (n \neq 1) \tag{6.54}$$

$I(m,n) = \int \sin^m\theta\cos^n\theta d\theta$ について、次の漸化式が成り立つ。

$$I(m,n) = \frac{\sin^{m+1}\theta\cos^{n-1}\theta}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}I(m+2,n-2) \quad (m+1\neq 0) \tag{6.55}$$

$$I(m,n) = -\frac{\sin^{m-1}\theta\cos^{n+1}\theta}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}I(m-2,n+2) \quad (n+1\neq 0) \tag{6.56}$$

$$I(m,n) = -\frac{\sin^{m+1}\theta\cos^{n+1}\theta}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}I(m,n+2) \quad (n+1\neq 0) \tag{6.57}$$

$$I(m,n) = \frac{\sin^{m+1}\theta\cos^{n+1}\theta}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}I(m+2,n) \quad (m+1\neq 0) \tag{6.58}$$

例題

(1)$\int \sin^2\theta d\theta$ を求めよ。

(2)$\int \cos^2\theta d\theta$ を求めよ。

(1)$\int \sin^2\theta d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}$

(2)$\int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}$

物理への応用

ある交流機器に電圧 $V = V_0\sin\omega t$ をかけると、電流 $I = I_0\sin(\omega t - \phi)$ が流れた。この機器が消費した平均電力 $\overline{P}$ を求める。

一周期の時間を $T = \frac{2\pi}{\omega}$ とおくと、平均の消費電力 $\overline{P}$ は

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T I_0V_0\sin\omega t\sin(\omega t-\phi)dt$$

ここで、$\sin\omega t\sin(\omega t-\phi) = \sin^2\omega t\cos\phi - \sin\omega t\cos\omega t\sin\phi$

$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t dt = \frac{1}{2}$ ，$\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t dt = 0$ であることを用いると、

$$\overline{P} = \frac{1}{2}I_0V_0\cos\phi$$

実効電圧 $V_e \equiv \frac{V_0}{\sqrt{2}}$、および実効電流 $I_e \equiv \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ を導入すると、$\overline{P} = V_eI_e\cos\phi$ と書くことができる。ここで、$\cos\phi$ を力率という。

第7章　複素数

7.1　複素数とは

2乗すると−1になるような新しい数を1つ考えて、これを i で表す。すなわち、$i^2 = -1$ である。この新しい数を**虚数単位**という。二つの実数 a, b をもちて、$a + ib$ の形で表される数を**複素数**という。a をこの**複素数の実数部**といい、b を**複素数の虚数部**という。

複素数の相等

a, b, c, d が実数、i が虚数単位とするとき、

$a + ib = c + id \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \quad b = d$

特に $a + ib = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad b = 0$

共役な複素数

複素数 $a + ib$ に対し、虚数部の符号が異なる複素数 $a - ib$ を,$a + ib$ の共役な複素数（きょうやくなふくそすうと読む）という。

共役な複素数の性質

複素数 $\alpha = a + ib$ に共役な複素数を $\overline{\alpha} = a - ib$ と表すと、

- $\alpha + \overline{\alpha} = 2a$
- $\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$
- $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$
- $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

複素数の四則演算

- 加法・減法：$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$
- 乗法：$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

- 除法：$\dfrac{(a+ib)}{(c+id)} = \dfrac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{b^2+d^2}$

> **例題**
> 二つの複素数を $A = 2+3i$ ， $B = 4-5i$ とするとき、次の計算をせよ。
> (1)　$A+B$　(2)　$A-B$　(3)　$A \times B$　(4)　A/B

(1)　$A+B = (2+3i)+(4-5i) = (2+4)+(3-5)i = 6-2i$
(2)　$A-B = (2+3i)-(4-5i) = (2-4)+(3+5)i = -2+8i$
(3)　$A \times B = (2+3i)\cdot(4-5i) = 2\cdot 4+3\cdot 4i-2\cdot 5i-3\cdot 5i^2 = 8+15+(12-10)i = 23+2i$
(4)　$A/B = \dfrac{2+3i}{4-5i} = \dfrac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \dfrac{-7+22i}{41}$

7.2　複素数平面

座標平面上の点 (a,b) が複素数 $a+ib$ を表すと定めると、
座標平面上の点　$\longleftrightarrow$　複素数
(a,b)　$\longleftrightarrow$　$a+ib$
１対１対応が成り立つ。ｘ軸を実軸、ｙ軸を虚軸と呼び、この平面を複素数平面またはガウス平面と呼ぶ。

共役な複素数の図示

複素数 $z = x+iy$ とその共役な複素数 $\overline{z} = x-iy$ について（図 7.1)、

- 点 z と点 $\overline{z}$ は実軸に関して対称
- 点 z と点 $-z$ は原点に関して対称
- 点 z と点 $-\overline{z}$ は虚軸に関して対称

複素数の実数倍・和・差の図示

- **実数倍の図示**：$\alpha \neq 0$ のとき、c を実数とすると、
  $\beta = c\alpha$　$\Longleftrightarrow$　３点 $0, \alpha, \beta$ が一直線上にある。
- **複素数の和の図示**：２つの複素数を $\alpha = a+ib, \beta = c+id$ とする。複素平面上の点Ａ (a,b), Ｂ (c,d) とするとき、原点Ｏ，点Ａおよび点Ｂが一直線上にないときは、和 $\alpha+\beta$ を表す複素平面上の点はＯＡ，ＯＢを２辺とする平行四辺形の第４の頂点Ｃ $(a+c, b+d)$ である。

- **複素数の差の図示**：和の場合と同様の２つの複素数 α, β を考える。原点O，点Aおよび点Bが一直線上にないときは、複素数 $\beta' = -c - id$ を示す点をＢ$'(-c, -d)$ とすると、$\alpha - \beta$ を表す複素数平面上の点はＯＡ，ＯＢ$'$ を２辺とする平行四辺形の第４の頂点Ｄ $(a - c, b - d)$ である（図 7.2)。

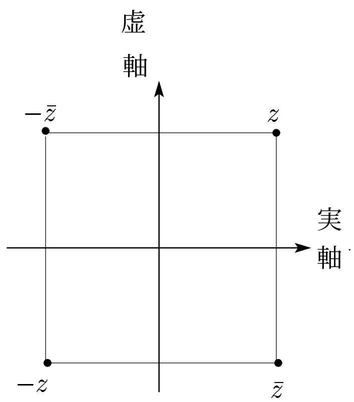


図 7.1: 複素共役

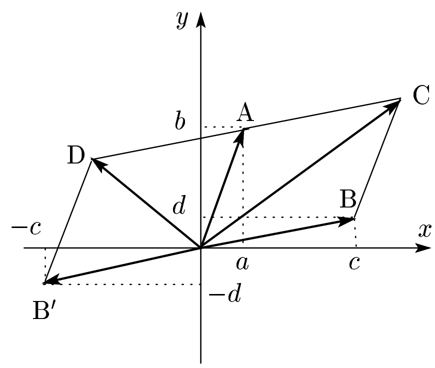


図 7.2: 複素数の和と差

複素数の絶対値
複素数 $z = x + iy$ に対して、$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を複素数 z の**絶対値**という。
複素数の絶対値の性質

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \quad y = 0$
- $\overline{z} = x - iy$ とすると、$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2, \quad |z| = |-z| = |\overline{z}|$
- ２つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ に対して、$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$

7.3 複素数の極形式

複素数 $z = x + iy$ が複素数平面上で表す点を P(x,y) とし、ＯＰの長さを r、半直線ＯＰが実軸の正の部分となす角を θ とすると、
$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}, \sin\theta = \dfrac{y}{r}$ と表され、これを**極形式**という。角 θ を複素数 z の偏角といい、arg z(arg は argument の略記号 アーギュメントと読む）で表す。極形式で表したとき、次のことが成り立つ。

- $|\overline{z}| = |z|, \quad arg\ \ \overline{z} = -arg\ \ z$
- $z \neq 0$, n は整数とするとき、z が実数 $\Longleftrightarrow \quad arg\ \ z = 180° \times n$
- $z \neq 0$, n は整数とするとき、$\arg\ \ z = 90° + 180° \times n$

例題
次の複素数を極形式で表せ
(1) $1+\sqrt{3}i$ (2) $2+2i$ (3) $4i$ (4) -3

(1) $1+\sqrt{3}i = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\right)$
$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos 60° + \sin 60° i\right)$
(2) $2+2i = \sqrt{2^2+2^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)$
$= 2\sqrt{2}\left(\cos 45° + \sin 45° i\right)$
(3) $4i = 4\left(0+\frac{4}{4}i\right) = 4\left(\cos 90° + \sin 90° i\right)$
(4) $-3 = 3\left(\frac{-3}{3}+0i\right) = 3\left(\cos 180° + \sin 180° i\right)$

問題
次の計算をせよ

$$(1)\ \frac{de^{i\theta}}{d\theta} \qquad (2)\ \frac{de^{-i\theta}}{d\theta}$$

(1)

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta + i\theta) = \frac{d\cos\theta}{d\theta} + i\frac{d\sin\theta}{d\theta}$$
$$= -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = ie^{i\theta}$$

(2)

$$\frac{d}{d\theta}e^{-i\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{d\cos\theta}{d\theta} - i\frac{d\sin\theta}{d\theta}$$
$$= -\sin\theta - i\cos\theta = -i(\cos\theta - i\sin\theta) = -ie^{-i\theta}$$

複素数の乗法と除法

２つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = x_2 + iy_2$
$= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とするとき、(ただし、$|z_2| \neq 0$ とする)
$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\} \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2$
$arg(z_1 z_2) = arg\ \ z_1 + arg\ \ z_2$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right\} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg\ \ z_1 - arg\ \ z_2$

7.4　ド・モアブルの定理

n を整数とするとき、

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

例題
複素数　$(1+\sqrt{3}\ i)^5$ の値を求めよ。

$1+\sqrt{3}\ i = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ となるので、
$(1+\sqrt{3}\ i)^5 = 2^5[\cos(60^\circ\times 5) + i\sin(60^\circ\times 5)] = 2^5(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ) = 32(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 16 - 16\sqrt{3}\ i$

１の n 乗根

自然数 n に対して、
$z^n = 1$ の解は
$z = \cos\dfrac{360^\circ}{n} + i\sin\dfrac{360^\circ}{n}$ とおくと、つぎの n 個が解である。
$z_k = \cos\left(\dfrac{360^\circ}{n}\times k\right) + i\sin\left(\dfrac{360^\circ}{n}\times k\right) \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$

複素数の n 乗根

複素数 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき、$z^n = \alpha$ をみたす α の n 乗根は次の n 個である。
$z_k = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{360^\circ}{n}\times k\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{360^\circ}{n}\times k\right)\right\}$
$(k = 0, 1, \cdots, n-1)$

第 8 章　微分・積分

8.1　関数の極限

極限

$f(x)$ について、独立変数 x が一定な実数 a に一致することなく限りなく α に近づくにつれて、関数 $f(x)$ の値が限りなく一定な値 α に近づくならば、この事実を

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \quad (x \to a)$$

で表す。
この事実を $\to a$ のとき、関数 $f(x)$ の極限が存在して、その極限が α であるという。
極限の性質
$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ のとき、

- $$\lim_{x \to a} (cf(x) + dg(x)) = c\alpha + d\beta$$
- $$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$
- $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

左極限、右極限
独立変数 x が数 a より大きい値を取りながら、a に接近するに従い、関数 $f(x)$ の値が限りなく α に近づくならばこの事実を

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$$

で表し、極限 α を $f(a+0)$ で表す。この $f(a+0)$ を点 $x = a$ における関数 $f(x)$ の**右極限値**という。
独立変数 x が a より小さい値から限りなく a に接近するとき、関数 $f(x)$ がある一定の値 β に限りなく近づいていくとき、この事実を

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \beta$$

で表し、この極限値 β を $f(a-0)$ と表す。この $f(a-0)$ を点 $x=a$ における関数 $f(x)$ の**左極限値**という。

$f(x-0)$ と $f(x+0)$ が共に存在し、極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は $f(x+0)=f(x-0)$ である。

関数の連続

関数 $f(x)$ について、実数 a がその定義域に含まれていて、さらに極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し、かつ、$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ であるとき、この関数 $f(x)$ は $x=\alpha$ で連続であるという。

区間 I に属するすべての実数 a で、関数 $f(x)$ が連続であるとき、関数 $f(x)$ は区間 I で連続である。

関数 $f(x)$ が連続でないとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で不連続であるという。

極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しないか、あるいは存在するが、$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ であるとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で不連続であるという。

連続関数の性質

- 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が点 $x=a$ で連続であるとき、
  - $f(x)+g(x)$ と $f(x)-g(x)$ は点 $x=a$ で連続である。
  - $kf(x)$ と $f(x)g(x)$ は点 $x=a$ で連続である。
  - 点 $x=a$ およびその付近でならば $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は点 $x=a$ で連続である。
- 関数 $f(x)$ と $g(y)$ がそれぞれ $x=a$ と点 $y=f(a)$ で連続で、合成関数 $g(f(a))$ を作ることができれば、$g(f(x))$ は点 $x=a$ で連続である。
- 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとき、$f(a)>0(f(a)<0)$ ならば、点 $x=a$ に十分近い、任意の x に対して $f(x)>0(f(x)<0)$
- 関数が閉区間で連続関数であるとき、
  - $f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば $f(\xi)=0$ となる数 ξ が a と b の間に少なくとも一つ存在する。
  - $f(a)<f(b)$ ならば $f(a)<f(\eta)<f(b)$ となる数 η が a と b の間に少なくとも一つ存在する。
- 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続ならば、は閉区間 $[a,b]$ 内で最大値と最小値を取る。

関数の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{8.1}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \tag{8.2}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{8.3}$$
$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e \tag{8.4}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \tag{8.5}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \tag{8.6}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a \tag{8.7}$$

8.2　微分

8.2.1　微分法

- 微分係数と導関数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{8.8}$$

$f'(a)$ を関数 $f(x)$ の $x=a$ での微分係数という。

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{8.9}$$

$f'(x)$ を導関数という。

- 微分法の公式
$f(x)$ および $g(x)$ を微分可能な関数とするとき、次の公式が成り立つ。

$$(kf(x))' = kf'(x) \quad (k \text{ は定数}) \tag{8.10}$$
$$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x) \tag{8.11}$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{8.12}$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{8.13}$$
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (g\neq 0) \tag{8.14}$$

- 合成関数の微分法
関数 $y = f(u)$ および $u = g(x)$ がそれぞれ u および x に関して微分可能なとき、合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{8.15}$$

- 逆関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \tag{8.16}$$

例題
次の関数の導関数を求める。
$y = \sin^{-1} x \quad \left(-1 < x < 1, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \sin^{-1} x$ すなわち、$\sin y = x$ となる。両辺を y で微分すると、
$\cos y = \dfrac{dx}{dy}$
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となる。
ただし、$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ であるから、$\cos y > 0$ を用いた。

- 媒介変数で表される関数の微分法
$x = f(t), y = g(t)$ と媒介変数 t を用いて、x および y が表現されるとき、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{8.17}$$

- いろいろな関数の導関数

$$\begin{aligned}
(x^r)' &= rx^{r-1} \qquad r : \text{実数} && (8.18)\\
(\sin x)' &= \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x && (8.19)\\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} && (8.20)\\
(\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} && (8.21)\\
(\log x)' &= \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\log a} && (8.22)\\
(e^x)' &= e^x \qquad (a^x)' = a^x \log a && (8.23)\\
(\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (8.24)\\
(\tan^{-1} x)' &= \frac{1}{1+x^2} && (8.25)
\end{aligned}$$

問題
次の関数の導関数を求めよ。
(1)$y = (x^2+1)^{10}$
(2)$y = e^{ax}$ (a は定数)
(3)$y = a\cos k(x-ct)$ (k, a, x は定数、t について微分せよ。)

(解 (1) $y' = 20x(x^2+1)^9$ (2) $y' = ae^{ax}$
(3) $y' = akc\sin k(x-ct)$)

- 高次導関数
関数 $y = f(x)$ が微分可能であれば、その導関数 $y' = f'(x)$ も x の関数である。$y' = f'(x)$ も微分可能であれば、
その導関数 $(y')' = (f'(x))'$ が考えられる。これを $y = f(x)$ の２次導関数といい、記号 y'',$f''(x)$,$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ と書く。同様にして、２次、３次、４次、$\cdots$ n次導関数を考えることができる。

- ライプニッツ (Leibniz) の公式
２つの関数 $u = u(x)$ と $v(x)$ が必要な回数微分可能であれば

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (8.26)$$
$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'' \quad (8.27)$$
$$(uv)^{(3)} = u^{(3)}v + 3u^{(2)}v' + 3u'v^{(2)} + uv^{(3)} \quad (8.28)$$
$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} u^{(k)} v^{(n-k)} \quad (8.29)$$

- テイラー展開
関数 $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ を含む開区間で n 回微分可能な関数とすると、

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)} + R_n \quad (8.30)$$

ここで、$R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n$

$a < c < b, 0 < \theta < 1$ となる c,θ が存在する。
(8.30) の右辺を関数 $f(x)$ の点 $x = a$ におけるテイラー展開といい、R_n をラグランジュの剰余という。

- マクローリン展開
$f(x)$ が $x = 0$ の近くで何回でも微分可能ならば次の式が成り立つ。

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1} \quad (8.31)$$

ここで、$R_{n+1} = \dfrac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$
もしも、$R_n \to 0 (n \to 0)$ ならば関数 $f(x)$ のべき級数展開が得られる。

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{8.32}$$

これをマクローリン展開という。

- マクローリン展開の例

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots && (8.33)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots && (8.34)\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots && (8.35)\\
e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= \left\{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right\} + i\left\{x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right\} \\
&= \cos x + i \sin x && (8.36)\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots && (8.37)\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots && (8.38)\\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{3}{2^3 3!}x^3 - \frac{3\cdot 5}{2^4 4!}x^4 + \cdots && (8.39)\\
\tan^{-1} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && (8.40)
\end{aligned}$$

8.2.1.1 近似式

x が 1 に比べて十分に小さいとき、しばしば次のような近似式が実際の計算において用いられる。

$$\begin{aligned}
e^x &\approx 1 + x && (8.41)\\
\sin x &\approx x && (8.42)\\
(1+x)^n &\approx 1 + nx && (8.43)\\
\sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{1}{2}x && (8.44)
\end{aligned}$$

> **物理への応用（単振動）**
> いま、長さ ℓ の糸の一端に質量 m のおもりをつけ、他端を固定して鉛直につるす。鉛直面内で振り子運動させる。このときの運動を考える。

２次元極座標による θ 方向の運動方程式（第１１章 (11.38) 参照）は

$$m(\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\ell}{dt}\frac{d\theta}{dt})=-mg\sin\theta$$

g は重力加速度の大きさである。糸の長さは変化しないので、$\frac{d\ell}{dt}=0$ であるから、運動方程式は

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

θ が小さいとき、$\sin\theta\approx\theta$ と近似できるので、方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

この方程式の一般解は $\theta(t)=A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+\phi\right)$　ここで、ϕ および A は初期条件から決まる任意の定数である。（一般解の詳細については第９章第５節参照）

8.2.2　微分法の応用

- 接線及び法線の方程式
  曲線 $y=f(x)$ 上の点 (x_0,y_0) における
  - 接線の方程式
    $$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \tag{8.45}$$
  - 法線の方程式
    $$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0 \tag{8.46}$$
- 平均値の定理
  関数 $f(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ で連続、$a<x<b$ で微分可能なとき、$a<c<b$ で $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ となる c が存在する。
- $f'(x)$ と関数の増減
  - $f'(x)>0$ となる x の区間で、関数は増加
  - $f'(x)<0$ となる x の区間で、関数は減少

- グラフの凸凹

  - $f''(x) > 0$ となる区間では、グラフは下に凸
  - $f''(x) < 0$ となる区間では、グラフは上に凸

8.3 偏微分

8.3.1 ２変数関数

- **関数**
  平面上のある領域 D に属する点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して、１つの実数 z が定まる規則があるとき、これを点 P または (x, y) の関数といい、記号 $z = f(P)$、または、$z = f(x, y)$ で表し、D をその定義域という。２つの変数 x と y の値を指定して初めて z の値が定まるから、$z = f(x, y)$ を２変数の関数という。

- **極限**
  点 P (x, y) が $\mathrm{A}(a, b)$ に一致することなく点 A に接近するにつれて（経路に関係なく）、$z = f(x, y)$ の値が一定の値 c に近づくならば、$z = f(x, y)$ の極限は存在し、その極限値は c であるという。これを下記のように書く。

$$\lim_{x \to a, y \to b} f(x, y) = c \tag{8.47}$$
$$\lim_{P \to A} f(P) = c \tag{8.48}$$

- **連続性**
  関数 $z = f(x, y)$ とその定義域 D 内の点 $\mathrm{A}(a, b)$ について、
  極限 $\lim_{P \to A} f(P)$ が存在し、しかも $\lim_{P \to A} = f(A)$ であるとき、この関数 $z = f(P)$ は点 $\mathrm{A}(a, b)$ で連続であるという。
  ある領域 D 内のすべての点で関数 $z = f(P)$ が連続であるとき、関数 $z = f(P)$ は領域 D で連続であるという。

8.3.2 偏導関数

偏微分

関数 $z = f(x, y)$ について、変数 y を一定と考えたとき、x についての導関数

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{8.49}$$

が存在するとき、このときの極限値を $z = f(x,y)$ の x に関する偏導関数という。これを記号

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad z_x \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad , \quad f_x \quad , \quad f_x(x,y) \quad , \quad \partial_x f \tag{8.50}$$

などと表す。
変数 x を一定にしたとき、y についての導関数を $z = f(x,y)$ の y に関する偏導関数といい、記号で次のように書く

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad z_y \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad , \quad f_y \quad f_y(x,y) \quad , \quad \partial_y f \tag{8.51}$$

例題
原点から、点 P (x,y,z) までの距離 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ と表すことが出来る。
次の偏微分を計算せよ。
(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ (2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r}$ (3) $\dfrac{\partial r^n}{\partial x}$

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$
(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r} = \dfrac{d}{dr}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r}{\partial x} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{x}{r} = -\dfrac{x}{r^3}$
(3) $\dfrac{\partial r^n}{\partial x} = \dfrac{dr^n}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x} = nr^{n-1}\dfrac{x}{r} = nxr^{n-2}$

8.3.3 全微分

関数 $z = f(x,y)$ の定義域を D とすると、D 内に近い 2 点 (a,b) と $(a+h, b+k)$ を取れば定数 A,B を適当に取れば、
$f(x+h, b+k) - f(x,y) = Ah + Bk + \epsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ とおくとき、$\epsilon(h,k) \to 0 \quad (h \to 0, k \to 0)$ が成り立つとき、関数 $z = f(x,y)$ は点 (a,b) で**全微分可能**であるという。領域 D 内で全微分可能なとき、$z = f(x,y)$ は D で**全微分可能**という。

- 全微分は
$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy \tag{8.52}$$
と書き表せる。

- 関数 $f(x,y)$ が全微分可能であり、関数 $x(t)$ と $y(t)$ が t に関して微分可能であるとする。このとき合成関数 $f(x(t), y(t))$ を作るとき、これは t に関して微分可能であって、
$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = f_x(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + f_y(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt} \tag{8.53}$$

- 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能で、$x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ も全微分可能であるとき、このとき、合成関数 $z = f(x(u, v), y(u, v))$ を作れば、これは全微分可能であって、

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned} \tag{8.54}$$

物理への応用（相対誤差）

直円錐の体積は底面の半径を r、高さを ℓ、円周率を π として、$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \ell$ で与えられる。測定には必ず誤差があるから、r の誤差を Δr、ℓ の誤差を $\Delta\ell$ とすると、これにより V の誤差 ΔV とすると、π も有限の小数で近似すればそれにより誤差を生じるからそれを $\Delta\pi$ とすると、

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial \pi}\Delta\pi + \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial \ell}\Delta\ell \tag{8.55}$$

これを $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \ell$ で割った「V の相対誤差」は

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{8.56}$$

相対誤差の限度は

$$\frac{|\Delta V|}{V} \leqq \frac{|\Delta\pi|}{\pi} + 2\frac{|\Delta r|}{r} + \frac{|\Delta\ell|}{\ell} \tag{8.57}$$

一般に、$u = x^n y^m z^\ell \cdots$ の場合には、べきの正負に関わらず相対誤差の限度は

$$\frac{|\Delta u|}{u} \leqq |n|\frac{|\Delta x|}{x} + |m|\frac{|\Delta y|}{y} + |\ell|\frac{|\Delta z|}{z} + \cdots \tag{8.58}$$

8.4 積分法

8.4.1 区分求積法

関数 $y = f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で定義されているとする。閉区間内 $[a, b]$ 内に $n-1$ 個の点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ を
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
の順に取り、$[a, b]$ を n 個の小区間 $[x_0, x_1], \cdots, [x_i, x_{i+1}], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ に分割する。各区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に含まれる ξ_i を任意に取り、次の和を作る。

$$S_N = f(\xi_i)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \tag{8.59}$$

小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の長さ $\Delta x = x_i - x_{i-1}\quad(i = 1, 2, \cdots, n)$ が限りなく小さくなるように細かくしていったとき、和 $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ が一定の数値に限りなく近づくならば、関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で積分可能であるといい、記号 $\int_a^b f(x)dx$ で表す（図 8.1）

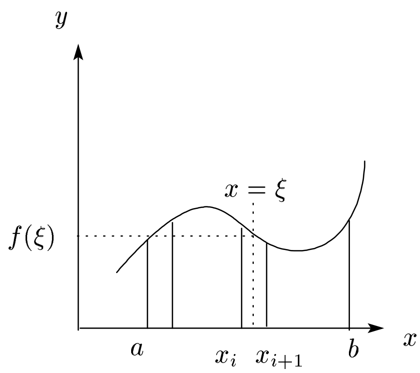


図 8.1: 区分求積法

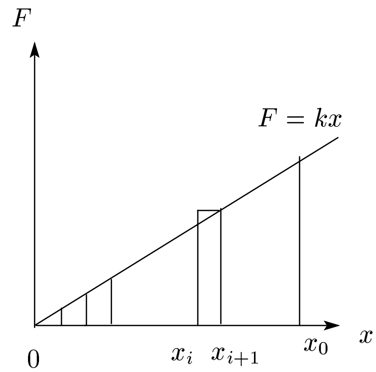


図 8.2: バネによる仕事

例題　$f(x) = x$ の場合

$h = \dfrac{b-a}{n}$ とおいて、a から b まで関数 $f(x) = x$ の区分求積法で求める。区間を n 等分し、長方形に分割してその面積の和を求めると、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1}(a+kh)h = nah + h^2\sum_{k=0}^{n-1}kh^2 \\ &= na \times \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)n}{2} \\ &= ab - a^2 + (b^2 - 2ab + a^2)\frac{n(n-1)}{2n^2} \end{aligned} \tag{8.60}$$

ここで $n \to \infty$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= ab - a^2 + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned} \tag{8.61}$$

物理学への応用（バネによる仕事）

いま、ばね定数が k[N/m] のばねがある。このばねを自然長の状態から x_0[m]

引き伸ばす仕事を計算する（図 8.2）。
x_0 を N 等分する。$\Delta x = \dfrac{x_0}{N}$ とする。いま、ばねが x 伸びた状態からさらに Δx だけ引き伸ばす仕事 ΔW を計算する。その時、きわめて短い距離なので Δx 伸ばす間はばねに掛かる力の大きさは $F = kx$ のままであるとする。（言い換えればこの近似が成り立つくらいに微小距離 Δx をとる。）
$\Delta W = kx \times \Delta x$
N 等分した各微小距離を引き伸ばす仕事を足し合わせれば x_0 引き伸ばす仕事が計算できる。よって、(4.2) 式を用いると

$$W = \sum \Delta W = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} k\left(\frac{x_0}{N}i\right)\frac{x_0}{N} = \lim_{N\to\infty} kx_0^2 \frac{N(N+1)}{2N^2} = \frac{1}{2}kx_0^2$$

8.4.2　定積分の性質

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{8.62}$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{8.63}$$
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \tag{8.64}$$
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \quad (f(x)\text{ は偶関数 } f(x) = f(-x)) \tag{8.65}$$
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \quad (f(x)\text{ は奇関数 } f(x) = -f(-x)) \tag{8.66}$$

8.4.2.1　微分と積分の関係

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x) \tag{8.67}$$

8.4.3　積分法の応用

- **定積分と不等式** ($a < b$ とする）
  - $f(x) \geq 0$ のとき、$\int_a^b f(x)dx \geq 0$
  - $f(x) \geq g(x)$ のとき、$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

- **２曲線間の面積**

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \tag{8.68}$$

- **切り口の面積が $S(x)$ の立体の体積**

$$V = \int_a^b S(x) dx \tag{8.69}$$

- **曲線 $y = f(x)$ の x 軸に関する回転体の体積**

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx \tag{8.70}$$

- **曲線の長さ**

  - $x = f(t), y = g(t), t_1 \leqq t \leqq t_2$ のとき

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2} dt \tag{8.71}$$

  - $y = f(x), a < b$ のとき

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx \tag{8.72}$$

8.4.4 不定積分の公式

$$\begin{aligned}
\int kf(x)dx &= k \int f(x)dx \quad (k \text{ は定数}) && (8.73)\\
\int (f(x) \pm g(x))dx &= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \text{ (複号同順)} && (8.74)\\
\int f(ax+b)dx &= \frac{1}{a}F(ax+b) \quad (\int f(x)dx = F(x)) && (8.75)
\end{aligned}$$

8.4.5 いろいろな関数の不定積分

C を積分定数とする。

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \neq -1) \tag{8.76}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + C \quad (r = -1) \tag{8.77}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\log_e |ax+b| + C \tag{8.78}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{8.79}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C \quad (a \neq 1) \tag{8.80}$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C \tag{8.81}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \tag{8.82}$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C \tag{8.83}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \tag{8.84}$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \tag{8.85}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\log_e |\cos ax| + C \tag{8.86}$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\log_e |\sin ax| + C \tag{8.87}$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \log_e \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C \tag{8.88}$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log_e \left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C \tag{8.89}$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C \tag{8.90}$$

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a}\sinh ax + C \tag{8.91}$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a}\log_e |\cosh ax| + C \tag{8.92}$$

$$\int \sinh^2 ax dx = \frac{1}{4a}\sinh 2ax - \frac{x}{2} + C \tag{8.93}$$

$$\int \cosh^2 ax dx = \frac{1}{4a}\sinh 2ax + \frac{x}{2} + C \tag{8.94}$$

$$\int \tanh^2 ax dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C \tag{8.95}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \tag{8.96}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \tag{8.97}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + C \tag{8.98}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \tag{8.99}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \log_e \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \tag{8.100}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + C \tag{8.101}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \tag{8.102}$$

$$\int \frac{x}{a^2 \pm x^2}dx = \pm\frac{1}{2} \log_e \left| a^2 \pm x^2 \right| + C \tag{8.103}$$

$$\int \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}dx = \pm\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C \tag{8.104}$$

$$\int \frac{x}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C \tag{8.105}$$

$$\int \frac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C \tag{8.106}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \tag{8.107}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C \tag{8.108}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \tag{8.109}$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + C \tag{8.110}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a} \log_e \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \tag{8.111}$$

$$\int \log_e ax dx = x \log_e |ax| - x + C \tag{8.112}$$

8.4.6 置換積分法

積分変数を括弧内のように変換する。

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad (x = g(t)) \tag{8.113}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad (u = g(x)) \tag{8.114}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \tag{8.115}$$

$$\int [f(x)]^r f'(x)dx = \frac{1}{r+1}[f(x)]^{r+1} \quad (r \neq -1) \tag{8.116}$$

置換積分の例題１

括弧内の置き換えをし、積分をする。

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right) \tag{8.117}$$

ここで　$(\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t)$ と置いた。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| \quad (A \text{ は定数}) \tag{8.118}$$

ここで、$(\sqrt{x^2 + A} = t - a)$ と置いた。

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| \quad (\sin x = t) \tag{8.119}$$

置換積分の例題２　$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$ を示せ。

$I = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx$ とおくと、$I = \int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy$ とも書けるから
$I^2 = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx \int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\alpha(x^2+y^2)}dy$
ここで、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、ヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$（式 (11.48) 参照）であるから、
$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha r^2} r d\theta = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\infty re^{-\alpha r^2}dr$
$\alpha r^2 = s$ とおくと、$2\alpha r dr = ds$ であるから、
$I^2 = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-s}\frac{1}{2\alpha}ds = \frac{\pi}{4\alpha}\int_0^\infty e^{-s}ds = \frac{\pi}{4\alpha} \qquad I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$

置換積分・部分積分例題３　$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ を示せ。

$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \int_0^\infty x \cdot xe^{-\alpha x^2}dx = \dfrac{1}{-2\alpha}\displaystyle\int_0^\infty x \cdot \frac{d}{dx}e^{-\alpha x^2}dx$
上の式の変形のときに、$xe^{-\alpha x^2} = \dfrac{d}{dx}e^{-\alpha x^2}$ の関係を用いた。
$= -\dfrac{1}{2\alpha}\left\{[xe^{-\alpha x^2}]_0^\infty - \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx\right\} \quad (\lim_{x\to 0} xe^{-\alpha x^2} = 0 \text{ だから})$
$= \dfrac{1}{2\alpha}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

積分例題４　$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha^2}$ を示せ

$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-\alpha t}dt \qquad (t = x^2, dt = 2xdx)$
$= \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}t\right]_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\right\} = \frac{1}{2\alpha^2}$

積分例題５　$\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{3}{8\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ を示せ

$\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}dx = \int_0^\infty x^3\cdot xe^{-\alpha x^2}dx = \frac{-1}{2\alpha}\int x^3\frac{d}{dx}xe^{-\alpha x^2}dx$
$= -\frac{1}{2\alpha}\left\{[x^3e^{-\alpha x^2}]_0^\infty - 3\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}dx\right\} \qquad (\lim_{x\to\infty} x^2e^{-\alpha x^2} = 0)$
$= \frac{3}{2\alpha}\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{3}{8\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

積分例題６　$\int_0^\infty x^{2k+1}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}$ を示せ

$I_{2k+1} \equiv \int_0^\infty x^{2k+1}e^{-\alpha x^2}dx$ とすると、
$I_1 = \int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}dx = \left[-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2\alpha}$
この式の両辺を α で微分すると、$\frac{dI_1}{d\alpha} = -\int_0^\infty x^3e^{-\alpha x^2}dx = -I_3$,
$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{2\alpha} = -\frac{1}{2\alpha^2} \quad \therefore \quad I_3 = \frac{1}{2\alpha^2}$
この式をさらに α で微分すると、$I_5 = \frac{3}{2\alpha^3}$ の関係を得る。
同様にしてこの操作を繰り返していくと、一般に、$I_{2k+1} = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}$

$$\boxed{\int_0^\infty x^{2k}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^{k+1}\alpha^k}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

任意の k に対する積分
$I_{2k} = \int_{-\infty}^\infty x^{2k}e^{-\alpha x^2}dx$, $I_0 = \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
パラメーター α で逐次微分すると
$-\frac{dI_0}{d\alpha} = \int_{-\infty}^\infty x^2e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = I_2$
$-\frac{dI_2}{d\alpha} = \int_{-\infty}^\infty x^4e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{\pi}{\alpha^2} = I_4$
$\cdots\cdots$
一般には、$I_{2k} = \int_{-\infty}^\infty x^{2k}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^{k+1}\alpha^k}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

物理への応用（速度分布関数）

絶対温度 T のとき、速さが v と $v+dv$ の間にある分子数 dN は、マクスウェルの速度分布関数 $f(v)=C\exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{mv^2}{kT}\right)$, $C=\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ (m は分子の質量、k はボルツマン定数）を用いると、次の式になる。

$$dN = N4\pi f(v)v^2dv$$

次の物理量を求めよ。

(1) もっとも多くの分子がもつ速さ v_m

(2) 平均の速さ $\overline{v}$

(3) 速さの 2 乗平均 $\overline{v^2}$

(1)

$$\frac{df(v)}{dv}=0 \Longrightarrow \quad v_m=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

(2) 平均の速さ $\overline{v}$ は、次の式で計算できる。

$$\overline{v}=\int_0^\infty v\frac{dN}{N}=\int_0^\infty v4\pi f(v)v^2dv$$

ここで上に記述されている積分例題 6 の結果を用いると、

$$\overline{v}=4\pi C\int_0^\infty v^3e^{-\alpha v^2}dv=4\pi C\frac{1}{2\alpha^2}=2\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2kT}{m}}=1.1283v_m$$

ここで、計算式を簡略化するため、$\alpha=\dfrac{m}{2kT}$ とおいた。

(3) 速さの 2 乗平均 $\overline{v^2}$ は、次の式で計算できる。

$$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2\frac{dN}{N}=\int_0^\infty v^24\pi f(v)v^2dv=4\pi C\int_0^\infty v^4e^{-\alpha v^2}dv$$

ここで、上に記述されている積分例題 6 の結果を用いると、

$$\overline{v^2}=4\pi C\int_0^\infty v^4e^{-\alpha v^2}dv=4\pi C\frac{3}{8\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=\frac{3kT}{m}$$

この結果より、

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2kT}{m}}=1.2247v_m$$

以上の結果をまとめると、

$$\overline{v}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2kT}{m}}\ \ ,\ \ \overline{v^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{\overline{v}}=\frac{\sqrt{6\pi}}{4}=1.085$$

無理関数の積分

無理関数を積分するときに適当な置換をし、求める積分を有理関数の積分の形に変換する。

- $\int F(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})dx$　（a, b, c, d）は定数

  このときは $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおく。

  $\boxed{\textbf{例題}\quad \int \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}dx \text{ をもとめる。}}$

  $\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}} = t$ とおくと、$x = \dfrac{2t^2+1}{t^2+1}, dx = \dfrac{2t}{(t^2+1)^2}dt$ となるので、

  $\int \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}dx = \int t\left(\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}\right)dt$

  ここで部分積分 (8.120 参照) をすると、

  $$= -\frac{t}{t^2+1} + \tan^{-1} t = -\sqrt{(x-1)(2-x)} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$$

- $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$　（$a > 0, b, c$ は定数）

  このときは $\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x = t$ とおく。

  $\boxed{\textbf{（例題）}\quad \int \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx \text{ を求める。}}$

  $\sqrt{x^2+1} + x = t$ とおくと、$x = \dfrac{t^2-1}{2t}$,　$\sqrt{x^2+1} = \dfrac{t^2+1}{2t}$,

  $dx = \dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$ となる。したがって、

  $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx = \displaystyle\int \dfrac{4t}{(t^2-1)^2}dt$ となるので、

  $u = t^2-1, du = 2tdt$ と変数を変えると、

  $\int \dfrac{4t}{(t^2-1)^2}dt = \displaystyle\int \dfrac{2}{u^2}du = -2\dfrac{1}{u} + C = -\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$

- $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$　（$a < 0, b, c$ は定数）

  この場合、ax^2+bx+c の判別式が正でなければならない。したがって、$ax^2+bx+c = -a(x-\alpha)(\beta-x)$　($\alpha < \beta$) と因数分解できるので、$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-\alpha)\sqrt{\dfrac{\beta-x}{x-\alpha}}$ となるから、前に述べた形である。

三角関数を利用した置換積分で無理関数の積分を求める。

- $\int F(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$　（$a > 0$ は定数）

この形のときは $x = a\tan\theta$ とおくと、$dx = a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となるので、積分変数が x から θ にかわる。

- $\int F(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx \quad (a > 0$ は定数)
  この形のときは $x = a\frac{1}{\cos\theta} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2})$ とおくと、
  $dx = a\frac{1}{\cos\theta}\tan\theta d\theta$ となり、積分変数が x から θ にかわる。
- $\int F(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx \quad (a > 0$ は定数)
  この形のときは $x = a\sin\theta \quad (-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ とおくと、$dx = a\cos\theta d\theta$ となり、積分変数が x に θ かわる。
- $\int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$
  置換 $t = x + \frac{b}{2a}$ とおくと、積分は上に述べた 3 タイプのどれかになる。

三角関数の有理関数の積分

- $\int F(\sin x)\cos x dx \qquad (\sin x = t$ とおく。)
- $\int F(\cos x)\sin x dx \qquad (\cos x = t$ とおく。)
- $\int F(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)dx \qquad (\tan x = t$ とおく。)
- $\int F(\sin x, \cos x)dx \qquad (\tan\frac{x}{2} = t$ とおく。)

8.4.7 部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{8.120}$$

部分積分の例

$$\int \log x dx = x\log x - x \tag{8.121}$$

$$\int \sqrt{x^2 + A}\ dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + A} + A\log|x + \sqrt{x^2 + A}|\right) \tag{8.122}$$

第9章　微分方程式

9.1　微分方程式とは

変数 x とその関数 y およびその導関数との間の式

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \tag{9.1}$$

を**微分方程式**といい、微分方程式に含まれる最高次の導関数が n 次導関数であるとき、これを n 階微分方程式という。また、(9.1) を満足する関数 y を (9.1) の解という。
一般に n この任意定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を含む式

$$f(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0 \tag{9.2}$$

があるとき、これを x について n 回微分して得られる n 個の式および (9.2) から $C_1, C_2, \cdots, C_n$ が消去できるときは、n 階微分方程式

$$F(x, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{9.3}$$

が得られる。この (9.3) は (9.3) が表す関数全体の性質を示している。
解の存在について
微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{9.4}$$

微分方程式 (9.4) において

- $f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) の近傍で連続
- その近傍の任意の 2 点 $(x, y_1), (x, y_2)$ に対して、
  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq k|y_1 - y_2|$　（k は正の定数）（Lipschitz の条件）

が成り立つとき、(x_0, y_0) を通る (9.4) の解がただ一つに限り存在する。
(9.4) の解で、$y = y(x, y_0)$ のように、一つの任意定数 y_0 を含むものを**一般解**といい、y_0 が特定の値 $\bar{y}_0$ となるような (9.4) の解 $y = y(x, \bar{y}_0)$ を特別解という。

9.2　一階の微分方程式

一階の微分方程式を積分法に帰着して求めることの出来る場合を考える。

9.2.1　変数分離形

一階の微分方程式が

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x)}{\phi(y)} \quad (\psi(x), \phi(y) \text{ は連続、} \phi(y) \neq 0) \tag{9.5}$$

という形のとき、これは次の積分に帰着する。

$$\int \phi(y)dy = \int \psi(x)dx + C (C \text{ は定数}) \tag{9.6}$$

物理への応用

放射性原子核が崩壊して他の原子核になるとき、時刻 t で現存する未崩壊の原子核の数を $N(t)$ とすると、

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

（λ は崩壊定数である）がなりたつ。$t = 0$ における $N(0)$ の値を N_0 とし、上の方程式の解を求める。

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \Longrightarrow \quad \frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt$$

両辺を積分し、$N(0) = N_0$ の関係を用いると、

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$N(t)$ が N_0 の半分になるまでの時間（半減期）を T とおくと、

$$N(T) = N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2} \Longrightarrow \quad \lambda T = \log_e 2$$

このことから、　$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ が導ける。

物理への応用（速度に比例する空気抵抗が働くとき）

重力の作用のもとで、質量 m[kg] の物体が自由落下を始めた。今、この物体に速度に比例する空気抵抗が働くものとしたとき、落下を始めてから t 秒後の速度を求めよ。

物体に働く力は下向きの重力と、上向きの空気抵抗になるから、運動方程式は

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - mkv(t)$$

ここで、g は重力加速度、mk は空気抵抗の比例定数とする。比例定数が mk としたのは、これ以後の式に分数 $1/m$ が出てこないようにするための便宜的なものである。上の方程式は未知関数 $v(t)$ についての一階の常微分方程式である。

方程式の両辺を m で割ると、

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - kv = -k(v - \frac{g}{k})$$
$$\frac{1}{v(t) - \frac{g}{k}}\frac{dv(t)}{dt} = -k$$

ここで、式の両辺を時間 t で積分すると、

$$\log\left\{v(t) - \frac{g}{k}\right\} = -kt + C$$

よって、方程式の一般解は $v(t) = e^{-kt+C} + \frac{g}{k} = C'e^{-kt} + \frac{g}{k}$ となる。C' は任意の定数である。初期条件として、$t = 0$ で初速度 0 とすると、$C' = -\frac{g}{k}$ となる。よって、

$$v(t) = \frac{g}{k}(-e^{-kt} + 1)$$

時間が十分に経過したときの速度は $v(t) \to \frac{g}{k}$ となる。この速度は物体に働く重力と速度に比例する空気抵抗が等しくなった後は物体には力が働いていないのと同じ状態になり（運動の第一法則）、等速直線運動をする。そのときの速度が $\frac{g}{k}$ で、終端速度と呼んでいる。

物理への応用
（速度の２乗に比例する空気抵抗があるときの落下運動)
地球上の質量 m の物体を初速度 v_0[m/s] で真上に投げあげるとき、ｔ秒後の速度 v[m/s] と時間ｔ秒との関係を求めよ。ただし、空気の抵抗は速度の２乗に比例するものとする

（解） 運動方程式は $m\frac{dv}{dt} = -(mg + Rv^2)$

$\dfrac{R}{mg} = \dfrac{1}{k^2}$ とおけば $\dfrac{dv}{dt} = -g\left(1 + \dfrac{v^2}{k^2}\right)$

$g\left(1 + \dfrac{v^2}{k^2}\right) \neq 0$ だから、$\dfrac{1}{g}\dfrac{1}{1 + \dfrac{v^2}{k^2}}\dfrac{dv}{dt} = -1$

これを解くと、$\dfrac{k}{g}\tan^{-1}\dfrac{v}{k} = -t + C$　　(C は任意定数)

$t = 0$ のとき $v = v_0$ であるから $C = \dfrac{v}{k}\tan^{-1}\dfrac{v_0}{k}$ したがって、

$t = \dfrac{k}{g}\left(\tan^{-1}\dfrac{v_0}{k} - \tan^{-1}\dfrac{v}{k}\right)$

9.2.2　同次形

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (f \text{ は連続}) \tag{9.7}$$

という形の場合、$y = xv$ とおくことにより、変数分離形に直すことが出来る。
(9.7) は $x\dfrac{dv}{dx} + v = f(v)$ となる。$f(v) - v \neq 0$ のとき、これは

$$\frac{1}{f(v) - v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \tag{9.8}$$

9.3　線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{9.9}$$

の形のものを一階線形微分方程式という。
この方程式の解は

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \tag{9.10}$$

9.4　二階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x) \tag{9.11}$$

を二階線形微分方程式という。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \tag{9.12}$$

を (9.11) の補助方程式という。
一般定理
(9.11) と (9.12) との間には次の関係がある。

- $v(x)$ を (9.11) の解、$w(x)$ を (9.12) の解とするとき、$v(x)+w(x)$ は (9.11) の解である。
- $u(x), v(x)$ が共に (9.11) の解であるとき、$u(x)-v(x)$ は (9.12) の解である。
- $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ がともに (9.12) の解であり、
  $u_1(x)\cdot u'(x)-u_1'(x)\cdot u_2(x)\neq 0$
  ならば、定数 C_1, C_2 を適当に定めることにより、
  $u_3(x)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)$

9.5 定数係数の二階線形常微分方程式の解法

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=f(x)$ を定係数 2 階常微分方程式という。$f(x)\neq 0$ となるものを非同次微分方程式、$f(x)=0$ の場合を同次微分方程式という。

9.5.0.1 同次微分方程式

$$y''+ay'+by=0 \qquad (a, b \text{ は定数}) \tag{9.13}$$

$y=e^{\lambda x}$ とおくと、$y'=\lambda e^{\lambda x},\quad y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$ であるから、これらを代入すると、

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{9.14}$$

が得られる。これをこの微分方程式の**特性方程式**という。判別式 $D=a^2-4b$ とおくとき、任意の定数 C_1, C_2 を含んだ形で次のように与えられる。この二つの任意定数は 2 つの初期条件または境界条件を与えることによりただ一通りに決まる。

- $D=a^2-4b>0$ のとき、(9.14) の二つの実数解を α, β とすれば (9.13) の一般解は、次のようになる。

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x} \tag{9.15}$$

- $D=a^2-4b=0$ のとき、(9.14) の重解を α とすると、(9.13) の一般解は

$$y=e^{\alpha x}(C_1x+C_2) \tag{9.16}$$

- $D=a^2-4b<0$ のとき、(9.14) の 2 解を $\alpha\pm i\beta$ とするとき、(9.13) の一般解は

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)=e^{\alpha x}(C_1'e^{i\beta x}+C_2'e^{-\beta x}) \tag{9.17}$$

例題
$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2=0 \quad (\omega_0>\gamma)$ の解を求める。

$x=e^{pt}$ とおくと、$\dfrac{dx}{dt}=pe^{pt} \quad \dfrac{d^2x}{dt^2}=p^2e^{pt}$ となるので、
方程式は　$e^{pt}(p^2+2\gamma p+\omega_0^2)=0$ となる。よって、
$p^2+2\gamma p+\omega_0^2=0$(特性方程式)
特性方程式の解は $p_\pm=-\gamma\pm\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\ \ i$
一般解は $x(t)=C_1e^{p_+t}+C_2e^{p_-t}=e^{-\gamma t}\left(C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}\right)$
解が実数になるときには $x(t)=\overline{x(t)}$ であるから、$C_1=\overline{C_2}$ の関係が成立する。
よって、$C_1=\dfrac{1}{2}Ce^{i\phi}, C_2=\dfrac{1}{2}Ce^{-i\phi}$ と選ぶことにより、
解は $x(t)=\dfrac{1}{2}C\left[e^{i(\omega t+\phi)}+e^{-i(\omega t+\phi)}\right]$
$=C\cos(\omega t+\phi)=Re\left\{Ce^{i(\omega t+\phi)}\right\}$
($Re\{\cdots\}$ の記号は $\{\cdots\}$ 内の関数の実数部をとることを意味する。)

例題
二階微分方程式
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0\cdots(\mathrm{A})$$
の解を $x(t)=e^{pt}$ の形で求める。

$$\frac{de^{pt}}{dt}=pe^{pt} \quad , \quad \frac{d^2e^{pt}}{dt^2}=p^2e^{pt}$$
であるから、これらを方程式に代入すると、
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0\Longrightarrow \quad e^{pt}(p^2+\omega^2)=0$$
よって、　$(p^2+\omega^2)=0\Longrightarrow \quad p=\pm i\omega$
よって、方程式 (A) の解は　$x_1=e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t \quad , \quad x_2=e^{-i\omega t}=\cos\omega t-i\sin\omega t$
一般解は
$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)=C_1'\cos\omega t+C_2'\sin\omega t=A\sin(\omega t+\phi)$$
ここで、$A=\sqrt{C_1'^2+C_2'^2} \qquad \phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{C_2'}{C_1'}\right)$

物理への応用（バネの振動）
バネ定数 k[N/m] のバネの先端に質量 m[kg] の小球を付け、他端を固定して、水平な床におく。小球をバネの自然長の位置から x_0 伸びたところから静かに放した。t 秒後の位置および速度を求める。

運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$
$x = e^{\lambda t}$ とおいて代入すると、特性方程式は $(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0$
特性方程式の解は $\lambda = \pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ となるので、
一般解は $x(t) = C_1 \cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t) + C_2 \sin(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t)$ となる。
初期条件は $x(0) = x_0, \dfrac{dx(0)}{dt} = 0$ であるから、$C_1 = x_0, C_2 = 0$ となるので、
位置は $x(t) = x_0 \cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t)$　速度は $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -x_0\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t)$

物理への応用（RLC 回路）
図のように抵抗 $R[\Omega]$, 自己インダクタンス L[H] のコイル、容量 C[F] のコンデンサーおよびスイッチ S が接続された回路がある。いま、コンデンサーに電荷 Q_0[C] が帯電した状態でスイッチ S が閉じられた。t 秒後のコンデンサーに帯電している電荷はいくらか。

回路の総電圧は 0 であるから、$L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{Q}{C} = 0$
$Q = e^{\lambda t}$ とおいて、上式に代入すると、特性方程式は $(L\lambda^2 + R\lambda + \dfrac{1}{C}) = 0$
となり、この方程式の解は $\lambda = \dfrac{1}{2L}(-R \pm \sqrt{R^2 - \dfrac{4L}{C}})$　ここで、$\dfrac{R}{2L} = \alpha$, $\sqrt{R^2 - \dfrac{4L}{C}} = \beta$ とおくと、一般解は $Q(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$ となる。$t = 0$ のとき、初期条件 $Q(0) = Q_0$, 電流 $I(0) = dQ(0)/dt = 0$ より、$B = 0$,$A = Q_0$ となるから、$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\cos\beta t$

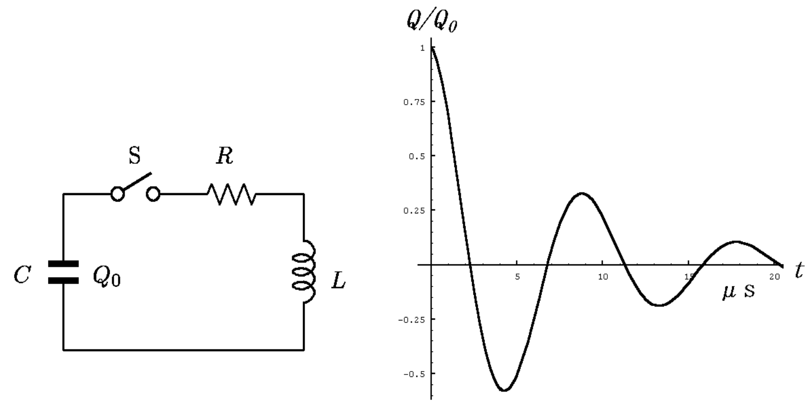


図 9.1: RLC 回路における電荷の時間変化
$C = 1.0[\mathrm{nF}]$ ， $R = 0.5[\mathrm{k\Omega}]$ ， $L = 2.0[\mathrm{mH}]$

9.6　定係数非同次微分方程式

9.6.1　非同次形の微分方程式

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{9.18}$$

式 (9.18) のように、右辺の $f(x) \neq 0$ であるとき、この微分方程式を非同時方程式という。

いま、この方程式 (9.18) の一つの解を $y_s(x)$ とする。(9.13) の一般解を $C_1y_1 + C_2y_2$ とすると、$y = y_s + C_1y_1 + C_2y_2$ は (9.18) の一般解になる。$y_s(x)$ は (9.18) の特殊解といわれる。

9.6.2　非同次方程式の解の構造

一般解＝特殊解＋対応する同次形の一般解

(9.18) の特殊解の求め方。

- $y'' + ay' + by = Ce^{\alpha x}$ **の特殊解**

$$y'' + ay' + by = Ce^{\alpha x} \tag{9.19}$$

$y = g(x)e^{\alpha x}$ とおいて、(9.19) に代入し、その式を満たす $g(x)$ を求める。

- ∘ $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$ の場合は $\quad g(x) = \dfrac{C}{\alpha^2 + a\alpha + b}$
- ∘ $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ の場合
  - ∗ $2\alpha + a \neq 0$ ならば、$g'(x) = \dfrac{C}{2\alpha + a}$、すなわち、$g(x) = \dfrac{Cx}{\alpha + a}$
  - ∗ $2\alpha + a = 0$ ならば、$g''(x) = C$、すなわち、$g(x) = \dfrac{Cx^2}{2}$

例題
次の方程式の特殊解を求めよ。

$$y'' - 3y' + 2y = 7e^{4x}$$

$y = g(x)e^{4x}$ とおくと、$y' = g'(x)e^{4x} + 4g(x)e^{4x}$, $y'' = g''(x)e^{4x} + 2 \cdot 4g'(x)e^{4x} + 4^2 g(x)e^{4x}$
これらの式を方程式に代入すると、

$$y'' - 3y' + 2y = \{g'' + (8-3)g' + (16-12+2)g\}\, e^{4x} = 7e^{4x}$$

ここで、$g'(x) = 0$, $(16 - 12 + 2)g(x)e^{4x} = 7e^{4x}$ を満たすように $g(x)$ をえらぶ。すなわち、$g(x) = \dfrac{7}{16-12+2} = \dfrac{7}{6}$
よって、特殊解は $y = \dfrac{7}{6}e^{4x}$

- $y'' + ay' + by = C \sin \alpha x \quad (\alpha > 0)$ **の特殊解**

$$y'' + ay' + by = C \sin \alpha x \tag{9.20}$$

オイラーの式より $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$ なので、(9.20) は (9.19) と同じ形になる。

$$y'' + ay' + by = Ce^{i\alpha x} \tag{9.21}$$

(9.21) の解 $y = y_1 + iy_2$ の虚数部 y_2 が (9.20) の特殊解になる。

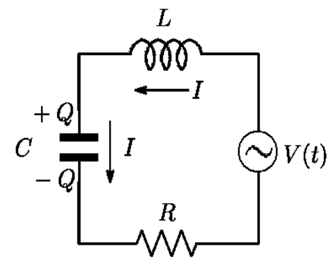
- ∘ $b - \alpha^2 + ia\alpha \neq 0$ の場合、$y = \dfrac{Ce^{i\alpha x}}{b - \alpha^2 + ia\alpha}$
  $y_2 = \dfrac{C\left((b-\alpha^2)\sin \alpha x - a\alpha \cos \alpha x\right)}{(b-\alpha^2)^2 + (a\alpha)^2}$
- ∘ $b - \alpha^2 + ia\alpha = 0$、すなわち、$b - \alpha^2 = 0$、$a = 0$ の場合、
  $y = \dfrac{Cxe^{i\alpha x}}{2i\alpha} \quad y_2 = -\dfrac{Cx \cos \alpha x}{2\alpha}$ が求める特殊解である。

  別解

  $y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ とおいて、(9.20) に代入し、両辺の $\sin \alpha x$ および $\cos \alpha x$ の係数が一致するように A および B を決める。
  $A = \dfrac{-a\alpha C}{(b-\alpha)^2 + a^2\alpha^2}$ および $B = \dfrac{C(b-\alpha^2)}{(b-\alpha^2)^2 + a^2\alpha^2}$ となり、

$y = \dfrac{C\left((b-\alpha^2)\sin\alpha x - a\alpha\cos\alpha x\right)}{(b-\alpha^2)^2+(a\alpha)^2}$ が求める特殊解である。

物理への応用（交流回路）
電圧が $V(t) = V_0\cos\omega t$ で変化する交流電源にコイル（インダクタンス L)、抵抗（抵抗値 R)、コンデンサー（静電容量 C）を直列に接続した。回路を流れる電流を求める。



時刻 t のときに回路を流れる電流を $I(t)$ とすると、これが満たす方程式は

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_0\cos\omega t$$

$Q(t)$ はコンデンサーに蓄えられる電気量である。この電気量と電流の間には $I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$ の関係があるので、これを上の方程式に代入すると、

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = V_0\cos\omega t$$

この方程式の特殊解を求めるため、$Q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ とおくと、$\dfrac{dQ(t)}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$　,　$\dfrac{d^2Q(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$

これらを方程式に代入し、整理すると、

$$\left(-A\omega^2L + BR\omega + \frac{1}{C}A\right)\cos\omega t$$
$$+\left(-B\omega^2L - A\omega R + B\frac{1}{C}\right)\sin\omega t = V_0\cos\omega t$$

任意の時刻でこの方程式が成立するためには、

$-A\omega^2L + BR\omega + \dfrac{1}{C}A = V_0$　,　$-B\omega^2L - A\omega R + B\dfrac{1}{C} = 0$

この 2 つの式は A, B に対する連立方程式であるから、これを解くと、

$A = \dfrac{(1/C-\omega^2L)V_0}{(1/C-\omega^2L)^2+\omega^2R^2}$　,　$B = \dfrac{\omega RV_0}{(1/C-\omega^2L)^2+\omega^2R^2}$

よって、特殊解は　$Q(t) = V_0\dfrac{(1/C-\omega^2L)\cos\omega t + (\omega R)\sin\omega t}{(1/C-\omega^2L)^2+\omega^2R^2}$

$= \dfrac{V_0}{\sqrt{(1/C-\omega^2L)^2+\omega^2R^2}}\sin(\omega t+\phi)$

ただし、$\tan\phi = \dfrac{1/C-\omega^2L}{\omega R} = \dfrac{1/(\omega C)-\omega L}{R}$ とした。

電流は $I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}=\dfrac{V_0\omega}{\sqrt{(1/C-\omega^2L)^2+\omega^2R^2}}\cos(\omega t+\phi)$
$=\dfrac{V_0}{\sqrt{(1/(C\omega)-\omega L)^2+R^2}}\cos(\omega t+\phi)$
ここで、$Z=\sqrt{(1/(C\omega)-\omega L)^2+R^2}$ をインピーダンス、ϕ を位相の遅れという。

- $y''+ay'+by=A_0+A_1x+\cdots+A_nx^n$ の特殊解
  $y=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n$ とおいて、微分方程式に代入し、係数 $C_0,C_1,\cdots,C_n$ が式を満たすように決める。

例題
$y''-y'-2y=x+1$ の特殊解を求める。

$y=C_0+C_1x$ とおいて、上式に代入すると、$-2C_1x-(C_1+2C_0)=x+1$ となるので、このことから、$C_1=-\dfrac{1}{2}$ および $C_0=-\dfrac{1}{4}$ となるから、特殊解は $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ である。

物理への応用（強制振動）
バネ定数 k[N/m] のバネの一端を固定し、他端に質量 m[kg] の質点を付け、滑らかで、水平な台の上に置く。バネの固定点が $mf\sin\omega t$ で振動するとき、バネに強制的な外力が加わったことになる。質点に空気抵抗が働かないとき、運動を考える

運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-kx(t)+mf\sin\omega t\cdots(\mathrm{A})$$

両辺を m で割り、右辺第一項を左辺に移項すると、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t)=f\sin\omega t\cdots(\mathrm{B})$$

この形の方程式の解を求める。

（B）式の右辺が 0 である斉次方程式を考える。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t)=0\cdots(\mathrm{C})$$

(C) の一般解は

$$x(t)=A\sin(\omega_0t+\phi)\cdots(\mathrm{D})$$

$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$ とおいた。ここで、A および ϕ は任意の定数である。
(C) の特殊解を求める。

- $\omega_0 \neq \omega$ **のとき、**
  方程式の右辺の形から、解を $x(t) = C\cos\omega t + B\sin\omega t$ と仮定すると
  $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -C\omega^2\cos\omega t - D\omega^2\sin\omega t$ であるから、これらの式を (B) に代入すると、
  $m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)C\cos\omega t + m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)D\sin\omega t = mf\sin\omega t$
  この関係式が、任意の t について成立するためには、
  $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)C = f$ ， $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)D = 0$
  このことから、$C = \dfrac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$ ， $D = 0$
  以上のことより、(B) の一般解は
  $$x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \phi\right) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t \cdots \text{(D)}$$
  (D) の右辺第一項は固有振動項、第二項は強制振動項である。

- $\omega_0 = \omega$ **のとき、**
  $x(t) = t\left(C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t\right)$ とおくと、
  $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 t\left(\cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t\right) + 2\left(-C\omega_0\sin\omega_0 t + D\omega_0\cos\omega_0 t\right)$
  これらの式を (B) の代入し、左右両辺を比較すると、次の関係を得る。
  $-2\omega_0 C\sin\omega_0 t + 2B\omega_0\cos\omega_0 t = f\sin\omega_0 t$
  よって、$C = -\dfrac{f}{2\omega_0}$ ， $D = 0$
  すなわち、特殊解は $x(t) = -\dfrac{ft}{2\omega_0}\cos\omega_0 t$
  よって、一般解は
  $$x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \phi\right) - \frac{ft}{2\omega_0}\cos\omega_0 t$$
  一般解の第二項は、強制振動項である。この部分の振幅は時間とともに大きくなる。これは共振である。

物理への応用（強制振動２ー弱い空気抵抗があるときー）

ｘ軸上の運動で、原点からの距離に比例し、原点に向かう力 $-kx (k > 0)$ の他に、運動状態に無関係な力である $mf\sin\omega t$ という強制力が作用し、それとともに、速度に比例した抵抗 $(-\lambda\dfrac{dx(t)}{dt})$ が加わる場合、運動はどのようになるか。ここで、m は運動する質点の質量、f ， λ は一定な定数とする。

運動方程式は
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \lambda\frac{dx(t)}{dt} + mf\sin\omega t \cdots \text{(a)}$$

両辺を m で割り、右辺の 2 項を左辺に移項すると、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{k}{m}x(t)=f\sin\omega t\cdots(\mathrm{b})$$

非斉次方程式 (b) の特殊解を求める。
$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ と仮定すると、
$\dfrac{dx(t)}{dt}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t \quad , \quad \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=-\omega^2A\cos\omega t-\omega^2B\sin\omega t$ となるので、

これらを (b) に代入し、整理すると、
$\left\{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A+\dfrac{\lambda}{m}\omega B\right\}\cos\omega t+\left\{-\dfrac{\lambda}{m}\omega A+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)B\right\}\sin\omega t=f\sin\omega t$
このことより、$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A+\dfrac{\lambda}{m}\omega B=0$

$-\dfrac{\lambda}{m}\omega A+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)B=f$

これは A,B を未知数とする 2 元 1 次連立方程式であるから、これを解くと、

$$A=\frac{\dfrac{\lambda\omega}{m}}{\left(\dfrac{\lambda\omega}{m}\right)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}f \quad , \quad B=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\dfrac{\lambda\omega}{m}\right)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}f$$

以上のことから、(b) の特殊解 $x_s(t)$ は

$$x_s(t)=A\sin(\omega t+\phi)\cdots(\mathrm{c})$$

ここで、$A=f/\sqrt{\left(\dfrac{\lambda\omega}{m}\right)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2} \quad , \quad \tan\phi=\dfrac{\lambda\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ である。
つぎに、(b) の右辺を 0 と置いた式の解を求める。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{k}{m}x(t)=0\cdots(\mathrm{d})$$

$x(t)=e^{\alpha t}$ と仮定すると、$\dfrac{dx(t)}{dt}=\alpha e^{\alpha t} \quad , \quad \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=\alpha^2e^{\alpha t}$ となるので、これらを (c) に代入すると、

$\left(\alpha^2+\alpha\dfrac{\lambda}{m}+\dfrac{k}{m}\right)e^{\alpha t}=0$

$e^{\alpha t}\neq 0$ であるから、$\alpha^2+\dfrac{\lambda}{m}\alpha+\dfrac{k}{m}=0$
この式より、$\alpha=\frac{1}{2}\left\{-\dfrac{\lambda}{m}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\lambda}{m}\right)^2-4\dfrac{k}{m}}\right\}$
抵抗が弱くて、$\lambda^2<4km$ となるとき、
一般解は

$$x(t)=e^{-\mu t}\left\{C\cos(\omega_1t)+D\sin(\omega_1t)\right\}$$

ここで、$\mu=\dfrac{\lambda}{2m} \quad , \quad \omega_1=\sqrt{\left(\dfrac{\lambda}{2m}\right)^2-\dfrac{k}{m}}$ で、C,D は任意の定数である。

以上のことより、(b) の一般解は

$$x(t) = e^{-\mu t}\left(C\cos(\omega_1 t) + D\sin(\omega_1 t)\right) + A\sin(\omega t + \phi)$$

ここで、$A = \dfrac{f}{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda\omega}{m}\right)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$ ， $\tan\phi = \dfrac{\lambda\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ で、C, D は任意の定数である。

第10章　スカラー場、ベクトル場

10.1　スカラー場、ベクトル場の定義

空間の各点にある種の量が定義されているとき、その空間はその量の場になっているという。スカラー量（大きさのみの量）が定義されているときはスカラー場といい、あるスカラー関数 $f(x,y,z)$ が空間の点の関数として与えられている場合である。例えば地面を基準に取るときの高さ y の点での重力による位置エネルギーは $U(y)=mgy$ と書ける。また、ベクトル量が定義されているときベクトル場といい、成分が空間の点のある関数 $A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)$ であるようなベクトル $\vec{A}(x,y,z)$ が与えられた場合である。

10.2　ベクトルの偏導関数

ベクトル $\vec{A}$ が x,y,z の関数のとき、その偏導関数およびその微分は

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\vec{j}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\vec{k} \tag{10.1}$$

$$d\vec{A}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz \tag{10.2}$$

ベクトル $\vec{A}$ の $\vec{s}$ 方向成分 s 方向の単位ベクトルを $\vec{s}$ とすると、

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial s}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=(\vec{s}\cdot\nabla)\vec{A} \tag{10.3}$$

曲線の接線ベクトル
曲線上の定点Aから、曲線上の任意の点Pまでの曲線の長さをsとし、点Pの位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると、$\vec{r}$ はsの関数で $\vec{r}(t)$ と書ける。このとき、

$$\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds} \tag{10.4}$$

は曲線に接する単位ベクトルとなり、$\vec{t}$ を**単位接線ベクトル**または**接線ベクトル**という。
曲線の主法線ベクトルと曲率半径

$$\vec{n}=\frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}=\frac{1}{\varkappa}\frac{d\vec{t}}{ds} \tag{10.5}$$

これを主法線ベクトルといい、$\varkappa = \left|\dfrac{d\vec{t}}{ds}\right|$ を**曲率**、$\rho = \dfrac{1}{\varkappa}$ を曲率半径という。$\vec{n}$ は単位接線ベクトルに垂直なベクトルである。

$$\varkappa = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \tag{10.6}$$

曲線上の点 P における接線ベクトル $\vec{t}$ と主法線ベクトル $\vec{n}$ とのベクトル積（外積）を陪法線ベクトルという。

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \tag{10.7}$$

また、２点 $P(s), Q(s+\Delta s)$ における陪法線ベクトル $\vec{b}$ のなす角を $\Delta\phi$ とすると、

$$\tau = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\phi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| \tag{10.8}$$

を曲線の捩率といい、曲率と同様に陪法線ベクトル $\vec{b}$ の方向の s に対する変化率を表す。

フレネ・セレー (Frenet-Serret) の公式

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \varkappa\vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= -\varkappa\vec{t} + \tau\vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau\vec{n} \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

10.3 場の微分演算

スカラー関数 $f(x,y,z)$、ベクトル $\vec{A}(x,y,z)$ が与えられたとき、次の諸式の右辺の量をそれぞれ f の勾配（グラジェント gradient：記号 $\nabla f, \mathrm{grad}\ f$）、$\vec{A}$ の発散（ダイバーゼンス divergence 記号：$\nabla\cdot\vec{A}, \mathrm{div}\vec{A}$）、$\vec{A}$ の回転（ローテーション rotation 記号：$\nabla\times\vec{A}, \mathrm{rot}\ \vec{A}$）とよぶ。

$$\text{勾配：}\mathrm{grad}\ f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{10.10}$$

$$\text{発散：}\mathrm{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{10.11}$$

$$\begin{aligned}\text{回転：}\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} \\ &+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} \\ &+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}\end{aligned} \tag{10.12}$$

10.3.1　勾配

微分演算子 **ナブラ** $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

勾配の性質

- $\nabla(\psi + \Psi) = \nabla\psi + \nabla\Psi$
- $\nabla(\psi\Psi) = \Psi\nabla\psi + \psi\nabla\Psi$
- $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$
- $\nabla\dfrac{\psi}{\Psi} = \Psi^{-2}(\Psi\nabla\psi - \psi\nabla\Psi)$

物理への応用（電場）

電荷 Q が原点にあるとき、点 P (x, y, z) での電位は

$$V(x, y, z) = k\frac{Q}{r}$$

と表すことが出来る。k は比例定数であり、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。

このとき、電場 $\vec{E}(x, y, z)$ は

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\ V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

と表される。

問題

電荷 Q が原点にあるとき、点 P (x, y, z) での電場を求めよ。

電位は $V = -\dfrac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ であるから、

$E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = kQ\left(\dfrac{x}{r^3}\right)$　,　$E_y = kQ\left(\dfrac{y}{r^3}\right)$　,　$E_z = kQ\left(\dfrac{z}{r^3}\right)$

よって、$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = kQ\left(\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3}\right) = kQ\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

10.3.2　ベクトルの発散

発散の性質

- $\nabla\cdot(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla\cdot\vec{B}$

- $\nabla(\psi\vec{A}) = \psi(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\nabla\psi)$
- $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B} - (\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A}$

問題
電荷 Q が原点にあるとき、点 P (x, y, z) での電場 $\vec{E}$ は div $\vec{E}=0$ を充たすことを示せ。点 P は原点を含まない。

電場は $\vec{E} = kQ\dfrac{\vec{r}}{r^3} \quad (\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ と表される。
$E_x = kQ\left(\dfrac{x}{r^3}\right) \quad , \quad E_y = kQ\left(\dfrac{y}{r^3}\right) \quad , \quad E_z = kQ\left(\dfrac{z}{r^3}\right)$ であるから
$\dfrac{\partial E_x}{\partial x} = kQ\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^5}\right)$
$\dfrac{\partial E_y}{\partial y} = kQ\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3y^2}{r^5}\right)$
$\dfrac{\partial E_z}{\partial z} = kQ\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3z^2}{r^5}\right)$
よって、div $\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = kQ\left(\dfrac{3}{r^3} - \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right) = 0$

10.3.3　ベクトルの回転

回転の定義（行列式 (10.14) の展開は第 12 章第 2 節を参照）

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} \tag{10.13}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{10.14}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{10.15}$$

公式

$$\nabla\times\vec{A} = \vec{i}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \vec{j}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \vec{k}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} \tag{10.16}$$

$$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B} \tag{10.17}$$

$$\nabla\times(\psi\vec{A}) = \psi(\nabla\times\vec{A}) + (\nabla\psi)\times\vec{A} \tag{10.18}$$

$$\nabla\times(\nabla\psi) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\psi) = 0 \tag{10.19}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) = 0 \tag{10.20}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \tag{10.21}$$

物理への応用

力 $\vec{F}(x,y,z)$ が保存力であるときには

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = 0$$

が成り立つ。（第 10 章 5 節ストークスの定理参照）

問題

次の力が保存力か、非保存力かを調べよ。

(1) $\vec{F_1} = c(x^2 + y^2, xy, 0)$ (2) $\vec{F_2} = c(x^2, y^2, z^2)$

(1) $\mathrm{rot}\ \vec{F_1} = (0, 0, -cy) \neq 0$ であるから、非保存力

(2) $\mathrm{rot}\ \vec{F_2} = (0, 0, 0) = 0$ であるから、保存力である。

10.3.4 ラプラシアン

あるスカラー関数 ψ の勾配 ($\nabla\psi = \mathrm{grad}\psi$) の発散 ($\mathrm{div\ grad}\ \psi = \nabla\cdot(\nabla\psi)$) をラプラシアンという。

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\psi) = \nabla\cdot(\nabla\psi) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{10.22}$$

10.4 ベクトルの積分

10.4.1 ベクトルの線積分

平面上での線積分

xy 平面上で、点Aから点Bに至る曲線Cを考える。この曲線上の点では、２つの一価関数 $F(x,y), G(x,y)$ で与えられる 2 つの数値が決まるものとする。いま、曲線上に $(n-1)$ 個の点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $\cdots$, (x_{n-1}, y_{n-1}) をとり、n 個の線分に分ける。始点Aおよび終点Bの座標をおのおの $(a_1, a_2) = (x_0, y_0), (b_1, b_2) = (x_n, y_n)$ とする。
細分した線分の一つを考える。その両端の座標が $(x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k)$ とする。そして、この線分上の任意の点の座標を (ξ_k, η_k) とするとき、$\Delta S_k = (x_k - x_{k-1})F(\xi_k, \eta_k) + (y_k - y_{k-1})G(\xi_k, \eta_k)$ の値を各細分した線分について考え、その和が細分数 n を無限に大きくしていくと、ある数値に限りなく近

くなるとき、この極限値を線積分という。それを式で次のように書く

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[(x_k-x_{k-1})F(\xi_k,\eta_k)+(y_k-y_{k-1})G(\xi_k,\eta_k)]$$

$$\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}\quad\int_C F(x,y)dx+G(x,y)dy$$

空間内での線積分

空間内で点A (a_1,a_2,a_3) から点B (b_1,b_2,b_3) に至る曲線Cを考える。
曲線C上では3つの一価関数 $F(x,y,z),G(x,y,z),H(x,y,z)$ で与えられる3つの数値が決まっているものとする。平面の場合と同様に曲線上に $(n-1)$ 個の点 (x_1,y_1,z_1) , (x_2,y_2,z_2) , $\cdots$, $(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$ をとり、n 個の線分に分ける。細分した線分の一つを考える。その両端の座標が $(x_{k-1},y_{k-1},z_{k-1}),(x_k,y_k,z_k)$ とする。そして、$\Delta x_k=x_k-x_{k-1},\Delta y_k=y_k-y_{k-1},\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ とおき、

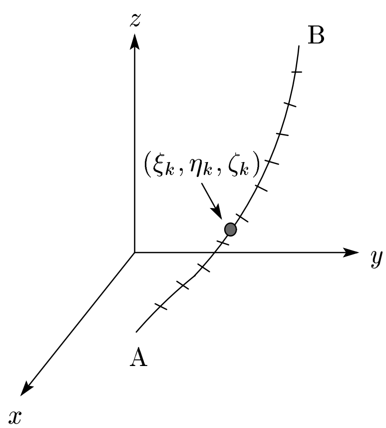


図 10.1: 3次元空間内の線積分

この線分上の任意の点の座標を (ξ_k,η_k,ζ_k) とするとき、
$\Delta S_k=\Delta x_k\cdot F(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)+\Delta y_k\cdot G(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$
$+\Delta z_k\cdot H(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ の値を各細分した線分について考え、その和が細分数 n を無限に大きくしていくと、ある数値に限りなく近くなるとき、この極限値を線積分という。それを式で次のように書く

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[\Delta x_k\cdot F(\xi_k,\eta_k)+\Delta y_k\cdot G(\xi_k,\eta_k)+\Delta z_k\cdot H(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)]$$

$$\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}\quad\int_C F(x,y,z)dx+G(x,y,z)dy+H(x,y,z)dz$$

いま、ベクトル $\overrightarrow{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\vec{i}+A_y(x,y,z)\vec{j}+A_z(x,y,z)\vec{k}$ が与えられている。
ここで、$F(x,y,z)\equiv A_x(x,y,z),G(x,y,z)\equiv A_y(x,y,z),H(x,y,z)\equiv A_z(x,y,z)$ と考え、
$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ であることから、

$\vec{A}(x,y,z)$ の曲線Cに沿っての線積分は

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C (u_x dx + u_y dy + u_z dz) \tag{10.23}$$

曲線C上の x,y,z がパラメーター t によって、$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ と表されるときは、

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \{A_x \frac{dx}{dt} + A_y \frac{dy}{dt} + A_z \frac{dz}{dt}\}dt \tag{10.24}$$

物理への応用（仕事２）
力が場所により変化しているとき、
一次元
ｘ軸上の点で力が $F(x)$ と与えられる場合を考える。このとき力の大きさは $|F(x)|$ で。力の方向は $F(x) > 0$ ならば、ｘ軸の正の向きに、$F(x) < 0$ ならば、ｘ軸の負の向きの力とする。

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

三次元
点Aから、経路Cを経て、点Bまで、物体を移動させるとき、力のする仕事を考える。
点 (x,y,z) での力は $\vec{F}(x,y,z)$ で与えられるものとする。大きさ、方向は位置により変化している。
AからBまでの仕事は積分で表せる。

$$W = \int_{\substack{A\\[C]}}^{B} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

ここで、F_x ，F_y ，F_z は力 $\vec{F}(x,y,z)$ のそれぞれｘ、ｙ、ｚ成分である。

例題
バネ定数 k[N/m] のバネを自然長の状態から x_0[m] 伸ばすために加えた力のした仕事を求める。

$$W = \int_0^{x_0} kxdx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{x_0} = \frac{1}{2}kx_0^2$$

例題
原点に質量 M[kg] の物体がある。質量 m[kg] の物体を点A $(a, 0)$ から点A $_1(2a, 0)$ までx軸に沿って進み、そこから点B $(2a, a)$ までy軸に沿って物体を移動させるときの仕事を求める。(万有引力定数を G とする。)

$$
\begin{aligned}
W_{AA_1} &= \int_a^{2a} GMm\frac{1}{x^2}dx = \Big[GMm\frac{-1}{x}\Big]_a^{2a} = \frac{GMm}{2a} \\
W_{A_1B} &= \int_0^a GMm\frac{1}{((2a)^2+y^2)}\frac{a\vec{i}+y\vec{j}}{\sqrt{((2a)^2+y^2)}}\cdot\vec{j}dy \\
&= \int_0^a GMm\frac{y}{((2a)^2+y^2)^{3/2}}dy \\
&= GMm\Big[-\frac{1}{((2a)^2+y^2)^{1/2}}\Big]_0^a = GMm\Big[-\frac{1}{\sqrt{5a^2}}+\frac{1}{2a}\Big]
\end{aligned}
$$

よって、仕事は $W = W_{AA_1} + W_{A_1B} = GMm\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\sqrt{5a^2}} + \frac{1}{2a}\right) = GMm\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{5}a}\right)$

10.4.2 スカラーの面積分

三次元空間内に1価連続な関数 $f(x, y)$ によって、$z = f(x, y)$
(或いは $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$) で表せる曲面Sを考える。
曲面Sの xy 平面へ投影した領域をRとする。領域Rを n 個の領域に分ける。細分化された各領域 $\Delta R_k \quad (k = 1, 2, \cdots)$ の境界線に沿って、xy 平面に垂直な面を作り、その面が曲面Sから切り取る曲面上の微小面積を ΔS_k とする。 曲面上で、定義された一価関数を $\Psi(x, y, z)$ とするとき、微小面積 ΔS_k 上の任意の点 (ξ_k, η_k, ζ_k) で $\Delta S_k \cdot \Psi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ という量を考える。

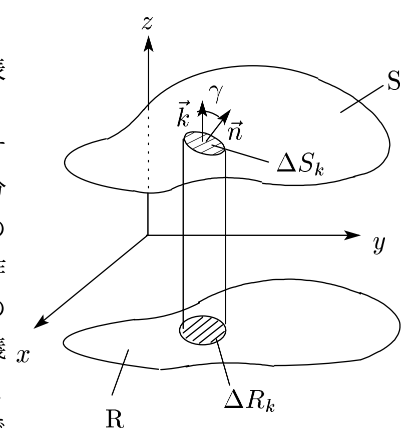


図 10.2: 面積分

この量を各微小面積について計算しその和が分割数 n を無限に大きくしていくとき、ある値に限りなく近づくならば、この数値を関数 $\Psi(x, y, z)$ の曲面Sについての面積分という。式で書くと次のようになる。

$$
\sum_{k=1}^{n}\Psi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cdot\Delta S_k \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \int_S \Psi(x, y, z)dS
$$

ΔS_k に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}_k$ とし、この単位ベクトルが z 軸となす角を γ_k とおくと、$\Delta R_k = \cos\gamma_k \Delta S_k$ の関係がある。曲面Ｓ上の点 (x, y, z) で、曲面Ｓに垂直なベクトル $\vec{n}$ は、$\dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv F_x$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv F_y$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial z} \equiv F_z$ とおくと、

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \nabla F(x, y, z)/|\nabla F(x, y, z)| \\ &= \left[F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right]/\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\end{aligned}$$

従って、$\cos\gamma$ は次の式で与えられる。

$$\cos\gamma = \vec{n}\cdot\vec{k} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

となる。 スカラー関数 $\Psi(x, y, z)$ が曲面Ｓ（曲面Ｓが $F(x, y, z) = 0$ と表せるとき、）で一価連続な関数で、曲面Ｓのｘｙ平面への投影をＲとするとき、

$$\int_S \Psi(x, y, z)dS = \int_R \Psi(x, y, z)\frac{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)\ 2}}{|F_z|}dxdy \tag{10.25}$$

10.4.3 ベクトルの面積分

ベクトル場 $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{J} + A_z\vec{k}$ が定義された空間内で曲面Ｓを考える。Ｓ上の各点で $\vec{A}$ の法線方向の成分は $A_n = \vec{A}\cdot\vec{n}$ である。
ここで、$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{K}$ はＳの法線方向の単位ベクトルである。このとき、次の積分を

$$\int_S A_n dS = \int_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \tag{10.26}$$

をベクトル場 $\vec{A}$ の曲面Ｓ上での面積分という。

曲面Ｓが $F(x, y, z) = 0$ で与えられる場合は、この曲面上の点Ｐでの法線ベクトルは、$\dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv F_x$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv F_y$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial z} \equiv F_z$ とおくと、

$$\vec{n} = \frac{F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \tag{10.27}$$

$\vec{n}$ がｘ、ｙ、ｚ軸となす角を各々α, β, γ とすると、

$$|\cos\alpha| = \frac{|F_x|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \tag{10.28}$$

$$|\cos\beta| = \frac{|F_y|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \tag{10.29}$$

$$|\cos\gamma| = \frac{|F_z|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \tag{10.30}$$

面の微小部分 dS のｙｚ、ｘｚ、ｘｙ面への射影をそれぞれ

$$\vec{i}\cdot d\vec{S} = dS_x = \cos\alpha\ dS = dydz \tag{10.31}$$

$$\vec{j}\cdot d\vec{S} = dS_y = \cos\beta\ dS = dxdz \tag{10.32}$$

$$\vec{k}\cdot d\vec{S} = dS_z = \cos\gamma\ dS = dxdy \tag{10.33}$$

曲面Ｓをｘｙ平面へ正射影して得られる領域をＲとすると、

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int\int_R \vec{A}\cdot\vec{n}\frac{dxdy}{|\vec{n}\cdot\vec{k}|} \tag{10.34}$$

10.5　積分公式

10.5.1　ガウスの定理

閉曲面Ｓで囲まれた体積Ｖ内のベクトル $\vec{A}$ の発散 $\nabla\cdot\vec{A}$ の体積分は $\vec{A}$ の面積分に等しい。

$$\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_V \nabla\cdot\vec{A}dV \tag{10.35}$$

これを**ガウスの定理**、または**ガウスの発散定理**という。これを成分で書くと、

$$\int_S (A_x dydz + A_y dxdz + A_z dxdy) = \int\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dV \tag{10.36}$$

10.5.2　グリーンの定理

ガウスの定理で $\psi = \phi\nabla\Psi$ とおいて

$$\int_V \left(\phi\nabla^2\Psi + \nabla\Psi\cdot\nabla\phi\right)dV = \phi\nabla\Psi\cdot\vec{n}dS \tag{10.37}$$

ϕ と Ψ とを交換し、引き算をすると、

$$\begin{aligned}\int_V \left(\phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\phi\right)dV &= \int_S (\phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\phi)\vec{n}dS \\ &= \int_S \left(\phi\frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS \end{aligned} \tag{10.38}$$

10.5.3　ストークスの定理

区分的に滑らかな閉曲線Ｃを周辺とする区分的に滑らかな曲線Ｓにおいて連続微分可能なベクトル $\vec{A}$ について、次の式が成立する。

$$\int_S rot\vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \tag{10.39}$$

を**ストークスの定理**という。これを成分で書くと、

$$\int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) dydz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy \tag{10.40}$$

物理への応用

保存力のする仕事は経路Cによらない。

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\oint$ は経路Cに沿った一周積分をあらわす。この式と (10.39) とをあわせると、

$$\mathrm{rot}\ \ \vec{F} = \vec{0}$$

が導かれる。これは保存力の判定条件として用いられる。

10.5.4 ガウス・グリーンの定理

2次元のベクトル $\vec{a}$ のx、y成分を $P(x,y)$,$Q(x,y)$ とすると、2次元のストークスの定理は

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{10.41}$$

これを**ガウス・グリーンの定理**、または**平面におけるグリーンの定理**という。

第11章　座標系

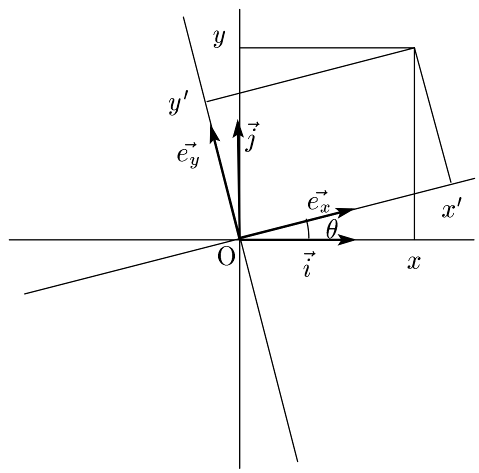
11.1　２次元極座標

11.1.1　座標の回転

ｘｙｚの３次元座標をｚ軸の周りに角度θ回転して出来る新しい座標系を$x', y'z$とすると、

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \qquad (11.1)$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \qquad (11.2)$$



元の座標系の単位ベクトルを$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$とし、新しい座標系での基本ベクトルを$\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$とすると、これらのベクトルの間には

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} &(11.3)\\ \vec{e}_y &= -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} &(11.4)\\ \vec{e}_z &= \vec{k} &(11.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos\theta\vec{e}_x - \sin\theta\vec{e}_y &(11.6)\\ \vec{j} &= \sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y &(11.7)\\ \vec{k} &= \vec{e}_z &(11.8)\end{aligned}$$

行列を用いて表現すると、

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} \qquad (11.9)$$

この逆変換は

$$\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix} \qquad (11.10)$$

$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} = A_{x'}\vec{e}_x + A_{y'}\vec{e}_y + A_{z'}\vec{e}_z$ とすると、これらの成分の間には次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} \tag{11.11}$$

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{11.12}$$

ここで、$\vec{e}_x \equiv \hat{r}, \vec{e}_y \equiv \hat{\theta}$ とおくと、

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} \tag{11.13}$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

逆変換は

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{11.15}$$

加速度は

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \tag{11.17}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} \tag{11.18}$$

11.1.2 偏微分の復習

いま、2 変数関数 $z = f(x,y)$ を考える。
$x = X(u,v), y = Y(u,v)$ と新たな変数 u, v で表せるとき、x, y についての偏微分を u, v についての偏微分に変換するには、次のように計算する。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{11.19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{11.20}$$

例

$$x = r\cos\theta \tag{11.21}$$

$$y = r\sin\theta \tag{11.22}$$

とするとき、$u = r, v = \theta$ とおいて、(11.19)(11.20) を計算するには、$(\partial u)/(\partial x)$ 等の計算をする必要がある。そこで、逆変換を求める。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{11.23}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{11.24}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{-\sin\theta}{r} \tag{11.25}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x} = \frac{\cos\theta}{r} \tag{11.26}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{-\sin\theta}{r} \tag{11.27}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \tag{11.28}$$

11.1.3 速度 · 加速度

平面上で動いている物体の位置を (x, y) とおくと、位置ベクトルは

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{11.29}$$

速度は

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \tag{11.30}$$

加速度は

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \tag{11.31}$$

11.1.4 直角座標から極座標へ変換

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくとき、r および θ が t の関数である場合には次の関係が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta + r(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} \tag{11.32}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta(\frac{d\theta}{dt})^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{11.33}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \tag{11.34}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta(\frac{d\theta}{dt})^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{11.35}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}, \qquad \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

v_r および v_θ は速度 $\vec{v}$ の r 方向成分、θ 方向成分である。a_r および a_θ は加速度 $\vec{a}$ の r 方向成分、および θ 方向成分である。それらは次のようになる。

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{11.36}$$

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \tag{11.37}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \tag{11.38}$$

上式で、$\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}, \ddot{r} = \dfrac{d^2r}{dt^2}, \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}, \ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ である。

2 次元ラプラシアン

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{11.39}$$

上の式を 2 次元ラプラシアンという。この式を (11.27)(11.28) を用いて極座標 (r,θ) に書き換える。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial f}{\partial x} \tag{11.40}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{-\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{-\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta} \\ &\quad - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \end{aligned} \tag{11.41}$$

y についても同様に計算すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{11.42}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) \\ &= \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r} \\ &\quad - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \end{aligned} \tag{11.43}$$

以上の計算結果より

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \end{aligned} \tag{11.44}$$

2 重積分

xy 座標を用いたときは、$dS = dxdy$、これを極座標に変換する。
$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$ を用いて、(x,y) から (r,θ) に変数を変換する。

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \tag{11.45}$$

この式をヤコビアンといい、$|J| = |\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}|$ をヤコビアンの絶対値という。
上の計算を用いると、

$$dS = dxdy = rdrd\theta \tag{11.46}$$

となるので、領域（原点が中心の半径 a の円内）での 2 重積分を考えると次の式になる。

$$\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_0^{2\pi}\int_0^a f(r,\theta)rdrd\theta \tag{11.47}$$

> **例題**
> $f(x,y) = f(r,\theta) = 1$ とおくと、2 重積分は円の面積を求める計算になる。

$I = \int_{-a}^{a}\left[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\right]dx = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$
ここで、$x = a\sin t$ とおくと、$dx = a\cos tdt$　$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$ となるから、上記の積分は
$I = 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 tdt = 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{1+\cos 2t}{2}dt$
$= 2a^2\left[\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi a^2$

一方、極座標を用いると、
$I = \int_0^{2\pi}\int_0^a rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\dfrac{r^2}{2}\right]_0^a d\theta = \pi a^2$

> **物理への応用（慣性モーメント）**
> 半径 a の均一な材質で出来た円盤の中心を通り、円盤に垂直な軸の周りの慣性モーメントを求める。

単位面積あたりの質量を ρ とすると、位置 (x,y) にある微少部分 dxdy の慣性モーメントは $dI = \rho dxdy(x^2+y^2)$ となるので、
円板全体では、
$I = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\rho(x^2+y^2)dxdy = \int_{-a}^{a}\rho\left[\dfrac{x^3}{3} + y^2x\right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy$
$= 2\rho\int_{-a}^{a}\left[\dfrac{(a^2-y^2)^{3/2}}{3} + y^2\sqrt{a^2-y^2}\right]dy$
ここで、$y = a\sin t$ とおくと、$dy = a\cos tdt$ となり、変数を y から t にかえると、
$I = 2\rho a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\dfrac{\cos^4 t}{3} + \sin^2 t\cos^2 t\right]dt = \dfrac{1}{2}a^4\rho\pi = \dfrac{1}{2}Ma^2$
ここで、$M = \pi a^2\rho$

一方、極座標を用いると、微小部分の慣性モーメントは $dI = \rho r dr d\theta r^2$
円板全体では
$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho r^2 r dr d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta$
$= \frac{\pi}{2} a^4 \rho = \frac{1}{2} M a^2$

11.2　３次元座標

11.2.1　3 次元積分

xyz 座標を用いたときは、$dS = dxdydz$、これを極座標に変換する。
$x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\theta$ を用いて、(x, y, z) から (r, θ, ϕ) に変数を変換する。

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta \end{aligned} \tag{11.48}$$

上の式はヤコビの行列式（ヤコビアン）と呼ばれている。
$dS = dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ となる。
原点に中心がある半径 a の球内の領域について積分を考えると、

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dzdydx \\ &\quad = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-a}^{a} f(r,\theta,\phi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \end{aligned} \tag{11.49}$$

例題
いま、$f(x, y, z) = 1$ の場合を考える。（球の体積の計算）

直角座標を用いた計算
$\int_{-a}^{a} \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1 dzdydx = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[z\right]_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dydx$

$= 2\int_{-a}^{a} \pi(a^2-x^2)dx = \dfrac{4\pi}{3}a^3$

y についての積分は置換積分する。

$y = \sqrt{a^2-x^2}\sin t$ とおいて、変数を t にかえて、積分を実行すると、

$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{(a^2-x^2-y^2)}dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(a^2-x^2)\cos^2 t dt$

$= (a^2-x^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{1+\cos 2t}{2}dt$

$= (a^2-x^2)\left[\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi(a^2-x^2)$

極座標を用いた計算

$\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \int_{-a}^{a} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \dfrac{4\pi}{3}a^3$

> **物理への応用（慣性モーメント）**
> 球の中心を通る軸の周りの慣性モーメントを求める。（球の密度を ρ とする。）

直角座標での計算

$I = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \rho(x^2+y^2)dzdydx$

$= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\rho\sqrt{a^2-x^2-y^2}dydx$

$= \rho\pi\int_{-a}^{a} x^2(a^2-x^2)dx + \dfrac{\pi}{4}\rho\displaystyle\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^2dx = \dfrac{2}{5}a^2(\rho\dfrac{4\pi}{3}a^3)$

$= \dfrac{2}{5}Ma^2$　　ただし、$M = \dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$

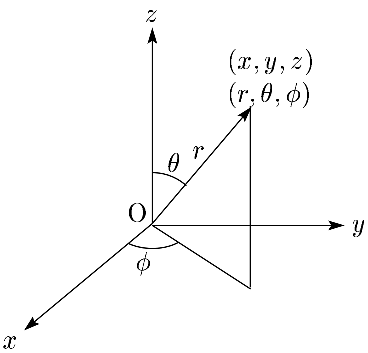
極座標を用いた計算

$I = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r\sin\theta)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \rho\int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$

$= \rho\dfrac{4\pi}{3}a^3\dfrac{2}{5}a^2 = \dfrac{2}{5}Ma^2$

11.2.2　座標変換（直角座標から極座標へ）

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta \qquad (11.50) \\
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\
\theta &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad (11.51)
\end{aligned}
$$



$$
\frac{\partial r}{\partial x}=\sin\theta\cos\phi \quad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta\sin\phi \quad \frac{\partial r}{\partial z}=\cos\theta \tag{11.52}
$$

$$
\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\cos\theta\cos\phi}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta\sin\phi}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}=\frac{-\sin\theta}{r} \tag{11.53}
$$

$$
\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}=0 \tag{11.54}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{-\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (11.55) \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (11.56) \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{-\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad (11.57)
\end{aligned}
$$

$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}=A_r\hat{r}+A_\theta\hat{\theta}+A_\phi\hat{\theta}$
ここで、$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ はおのおのｘ、ｙ、ｚ軸の正方向の単位ベクトル（大きさが１）である。また、$\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi}$ はおのおの動径方向、θ 方向、ϕ 方向の単位ベクトルである。A_x, A_y, A_z はおのおの $\vec{A}$ のｘ成分、ｙ成分、ｚ成分である。また、$\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi}$ はおのおの r 方向、θ 方向、ϕ 方向の単位ベクトルである。
これらの成分の間および単位ベクトルの間には次の関係が成立する。

$$
\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \tag{11.58}
$$

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{11.59}$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} \tag{11.60}$$

11.2.3 微分演算

$(x,y,z)\to(r,\theta,\phi)$ への変換

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{-\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \quad (11.61) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \quad (11.62) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{-\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \quad (11.63) \end{aligned}$$

勾配（grad)

$$\begin{aligned} \nabla f &= \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z} \quad (11.64) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi} \quad (11.65) \end{aligned}$$

発散

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (11.66) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (11.67) \end{aligned}$$

回転

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{11.68}$$
$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{11.69}$$
$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{11.70}$$
$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\left(r\sin\theta A_\phi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\phi}\right) \tag{11.71}$$
$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_\theta = \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(r\sin\theta A_\phi\right)}{\partial r}\right) \tag{11.72}$$
$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_\phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \tag{11.73}$$

ラプラシアン

$$\Delta V(x,y,z) = \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} \tag{11.74}$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} \tag{11.75}$$

11.3 直交曲線座標

直交座標 $x.y.z$ を x_1, x_2x_3 とかき、これらの関数から他の直交座標 u,v,w を導入し、u_1,u_2,u_3 と書くことにする。

$$u_i = u_i(x_1,x_2,x_3) \qquad x_i = x_i(u_1,u_2,u_3) \tag{11.76}$$

u_1,u_2,u_3 の内の一つ u_1 だけを変化させたとき、一つの曲線ができる。 その曲線を u_1 曲線という。任意の点を通り u_1 曲線、u_2 曲線、u_3 曲線が描けるが

$$h_{\ell m} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial u_\ell}\frac{\partial x_i}{\partial u_m} = 0 \qquad (\ell \neq m) \tag{11.77}$$

(11.76) になるように (11.77) がとってあると、これらの曲線は各点で直交する。(u_1,u_2,u_3) を座標として表すとき、これを**直交曲線座標**という。物理学でよく使用される曲線座標としては球座標、円筒座標などがある。ある点での各３つの曲線に引いた接線の線要素を ds_1, ds_2, ds_3 とすると、

$$ds_j = h_j u_j \qquad h_j = \sqrt{h_{jj}} \tag{11.78}$$

ここで、$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ をおのおの dq_1, dq_2, dq_3 方向の単位ベクトルとするとき、変換した座標系での微分演算は次のようになる。

$$\mathbf{grad}f = \frac{\partial f}{h_1 \partial u_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{h_2 \partial u_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{h_3 \partial u_3}\vec{e}_3 \tag{11.79}$$

$$\begin{aligned} h_1 h_2 h_3 \times \mathbf{div}\vec{A} &= \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3) \end{aligned} \tag{11.80}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\vec{A} &= \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)\right)\vec{e}_1 \\ &\quad + \frac{1}{h_3 h_1}\left(\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}\right)\vec{e}_2 \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right)\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{11.81}$$

$$\begin{aligned} h_1 h_2 h_3 \times \Delta f &= \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right) \end{aligned} \tag{11.82}$$

11.3.1 具体例

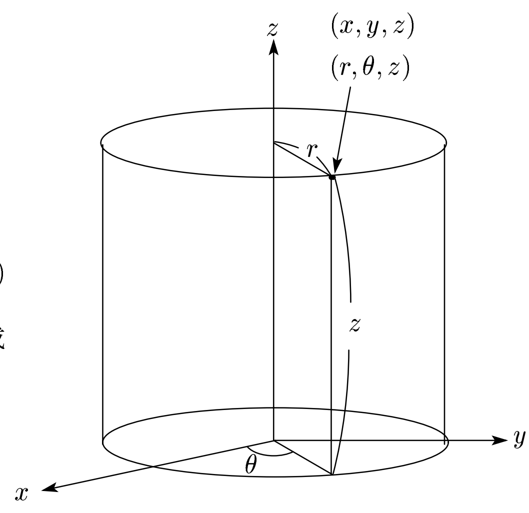
物理学でよく使用する円筒座標、球座標について考える。

11.3.1.1 円筒座標

円筒座標を r, θ, z とすると、

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned} \tag{11.83}$$

ベクトル $\vec{A}$ の r 方向,θ 方向,z 方向の成分を各々 A_r, A_θ, A_z および単位ベクトルを $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ とおくと、



$$A_r = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta \quad A_\theta = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta, \quad A_z = A_z \tag{11.84}$$

$u_1 = r, Uu_2 = \theta, u_3 = z$ とすると、$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$ となるから、円筒座標を用いたときの微分演算は

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z && (11.85)\\
\mathbf{div}\vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && (11.86)\\
\mathbf{rot}\vec{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta \\
&\quad + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z && (11.87)\\
\Delta f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && (11.88)
\end{aligned}$$

11.3.1.2 球座標

極座標を r, θ, ϕ とすると、

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = \sin\theta\cos\phi \quad z = r\cos\theta \qquad (11.89)$$

r だけ、θ だけ、ϕ だけがそれぞれ増す方向の単位ベクトルを $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$、$\vec{e}_\phi$ とし、ベクトル $\vec{A}$ の $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$、$\vec{e}_\phi$ の方向の成分を A_r, A_θ, A_ϕ とすると、

$$\begin{aligned}
A_r &= A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta\\
A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta\\
A_\phi &= -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi
\end{aligned}$$

$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi$ とすると、$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$ であるから、極座標を用いた微分演算は

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi\\
\mathbf{div}\vec{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + r\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right)\\
\mathbf{rot}\vec{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial \phi}\right)\vec{e}_r\\
&\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\phi)\right)\vec{e}_\theta\\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\phi\\
\Delta f &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right)
\end{aligned}$$

第12章　行列・行列式

12.1　行列

12.1.1　行列とは

$n \times m$ 個の複素数を縦に n 個、横に m 個ならべ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

と書いたものを $n \times m$ 行列 (matrix)、n 行 m 列行列、または (n, m) 型行列という。行列を構成している mn 個の複素数を成分または要素 (element) と呼び、$a_{k\ell}$ 成分、あるいは (k, ℓ) 成分と呼ぶ。横の並びを行 (row)、縦の並びを列 (column) と呼ぶ。$n \times 1$ 行列は列ベクトル (column vector)、$1 \times m$ 行列は行ベクトル (row vector) と呼ぶ。

12.1.2　行列の演算

12.1.2.1　行列の和および実数倍

行列の相等

２つの $n \times m$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & b_{nm} \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

について、その対応する要素 a_{ij} と b_{ij} とがすべて等しいとき、すなわち $a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$ であるとき、行列 A と B が等しく、$A = B$ と表す。

行列の加減

２つの行列 $A = (a_{ij})$、$B = (b_{ij})$ が与えられたとき、その対応する要素の和

（差）$(c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}(d_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$ を要素とする行列 $C = (c_{ij})(D = (d_{ij}))$ を行列 A と B の和（差）といい、記号 $C = A + B(D = A - B)$ で表す。

行列の積

２つの行列 $M \times N$ 行列 $A = (a_{ij})$、$N \times L$ 行列 $B = (b_{ij})$ が与えられたとき、その対応する要素の和（差）$(c_{k\ell} = \sum_{j=1}^{N} a_{kj} b_{j\ell})$ を要素とする行列 $M \times L$ 行列 $C = (c_{ij})$ を行列 A と B との積といい、記号 $C = AB$ で表す。ここで注意すべきことは、一般的には $AB \neq BA$ である。

いろいろな行列

- 三角行列：対角線より右上または左下の要素がすべて０であるような行列
- 単位行列：行列の対角要素 a_{ii} が１で、非対角要素 $a_{ij} \quad (i \neq j)$ がすべて０である行列を単位行列といい、記号 E または I で表す。
- 転置行列：行列の要素の行と列を入れ替えて出来る行列を元の行列の転置行列といい、記号 A^T と表す。Tは transposed を表すTである。$A^T = A$ が成り立つとき、この行列を対称行列という。$A^T = -A$ が成り立つとき、この行列を反対称行列という。
- 逆行列：$A^{-1}A = AA^{-1} = 1$ を満たす行列 A^{-1} を元の行列 A の逆行列という。
- 正方行列：行と列の数が同じ行列を正方行列という。
- 複素共役行列：行列 A の各要素の複素共役を要素とする行列を元の行列の複素共役行列という。記号 A^* で表す。$A^* = A$ が成り立つときは、行列の要素はすべて実数である。
- エルミート共役行列：元の行列に転置と複素共役を同時に施して得られる行列を元の行列のエルミート共役行列という。記号 $A^\dagger$ で表す。$A^\dagger = A$ が成り立つとき、この行列をエルミート行列という。$A^\dagger = -A$ が成り立つとき、この行列を反エルミート行列という。
- 直交行列：転置行列が元の行列の逆行列に等しい行列。$A^T = A^{-1}$
- ユニタリー行列：$A^\dagger = A^{-1}$ の関係が成立するような行列。$A^\dagger A = 1$ が成り立つ。

表 12.1: 行列演算規則

演算	行列要素	A	B	C
等式 $C=A$	$C_{ij}=A_{ij}$	$m\times n$		$m\times n$
加法 $C=A+B$	$C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$	$m\times n$	$m\times n$	$m\times n$
零行列 $A=0$	$A_{ij}=0$	$m\times n$		
スカラーとの積 $C=\alpha A$	$C_{ij}=\alpha A_{ij}$	$m\times n$		$m\times n$
行列との積 $C=AB$				
$\neq BA$	$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$	$m\times n$	$n\times \ell$	$m\times \ell$

表 12.2: 行列の演算

演算	行列要素		A	$C=A$ ならば
転置	$C=A^T$	$C_{ij}=A_{ji}$	$m\times n$	対称行列
複素共役	$C=A^*$	$C_{ij}=A^*_{ij}$	$m\times n$	実数行列
エルミート共役	$C=A^\dagger=(A^T)^*$	$C_{ij}=A^*_{ji}$	$m\times n$	エルミート行列

12.2 行列式

12.2.1 行列式の定義

$n\times n$ 行列の正方行列 A その要素を a_{ij} とするとき、次の計算を行列 A の行列式 (determinant) といい、記号 det$A$ または $|A|$ と表す。

$$
\begin{aligned}
|A| = detA = det(a_{ij}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum (-1)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \qquad (12.3)
\end{aligned}
$$

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ の n 個の記号は $1, 2, \cdots, n$ のいずれかの数値に対応している。P はこれらの数値を 2 個ずつ入れ替えて、元の順番 $1, 2, \cdots, n$ に並べ替える回数を表す。

例 1 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき、行列式を計算せよ。

$$
\begin{aligned}
detA &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (12.4)
\end{aligned}
$$

例 2

$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき、行列式を計算せよ

$$\begin{aligned} detA &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad +(-1)^1 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{12.5}$$

2×2 行列、および 3×3 行列式の計算法（サラスの方法）

２行２列の行列式、および３行３列の行列式を計算するときには下図のように、実線矢印の向きには符号＋、点線矢印の向きにかけ算した場合にはーの符号をつける。

そうすると、例２，および例３の結果と同じ式が得られる。

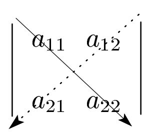


図 12.1: 2×2 行列の行列式

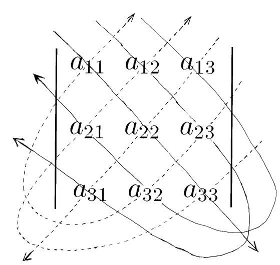


図 12.2: 3×3 行列の行列式

例題（ベクトル積の行列式表現）

いま、$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$　，　$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ とするとき、この２つのベクトルのベクトル積を行列式を用いて表す。

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

これは行列式

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

を第一行目で展開したものである。したがって、

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

とかくことができる。

ラプラス展開

$n\times n$ 行列の行列式Dから i 行、j 列を除いて得られる（$n-1$）次の行列式を a_{ij} の小行列式といい、記号 M_{ij} と書くことにすると、小行列式 M_{ij} に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを a_{ij} の余因子といい、記号 C_{ij} とかくことにする。

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{12.6}$$

この余因子を用いると、行列式は次のようになる。

$$\begin{aligned} D &= a_{j1}C_{j1}+a_{j2}C_{j2}+\cdots+a_{jn}C_{jn}\\ &= a_{1k}C_{1k}+a_{2k}C_{2k}+\cdots+a_{nk}C_{nk} \end{aligned} \tag{12.7}$$

この方法で例 2 を計算し、式 (12.5 と一致することを確かめよ。

行列式の性質

- 行と列を交換しても行列式の値は変わらない。$detA=detA^T$
- どの行でラプラス展開しても、どの列でラプラス展開しても、行列式の値は変わらない。
- ある行（またはある列）のすべての要素が 0 であるなら、行列式の値は 0 である。
- 任意の 2 行（あるいは任意の 2 列）を入れ替えると行列式の値は符号が変わる。
- 一つの行（または列）の要素をすべて a 倍すれば、行列式の値も a 倍になる。
- 二つの行（または列）の対応するようその間に比例関係があれば、行列式の値は 0 である。
- 任意の行のすべての要素に同じ数を掛けて、それを他の行に加えても、行列式の値は変わらない。
- 任意の列のすべての要素に同じ数を掛けて、それを他の列に加えても、行列式の値は変わらない。

- 2 つの行列 A と B が同じ大きさの正方行列ならば、
  $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$

逆行列の求め方
逆行列を持つとき、行列 A は正則であるという。行列 A の行列式 D が 0 でないとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdot & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdot & C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdot & C_{nn} \end{pmatrix} \tag{12.8}$$

ここで、C_{ij} は行列 A の要素 a_{ij} の余因子である。

12.3　連立一次方程式

次の n 元一次連立方程式が与えられたとき、

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

これを行列を用いて書くと、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \tag{12.9}$$

ここで行列 A、列ベクトル X および B を書きのように置く。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \tag{12.10}$$

行列 A の k 列目を列ベクトル B で置き換えた行列の行列式の値を D_k、行列 A の行列式の値を D とするとき、連立方程式の解は

$$x_k = \frac{D_k}{D} \tag{12.11}$$

(12.11) の式を**クラメルの公式**という。
連立方程式の解について

- $D \neq 0$　$B \neq 0$ ならば、連立方程式の解 x_k は一意的に定まる。

- $D \neq 0 \quad B = 0$ ならば、$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
- $D = 0 \quad B = 0$ ならば、無限個の解の組が存在する。
- $D = 0 \quad B \neq 0$ ならば、すべての $D_k = 0$ のときだけ、無限個の解が存在する。

例題

連立方程式 $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ の解を求める。

（解）$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$

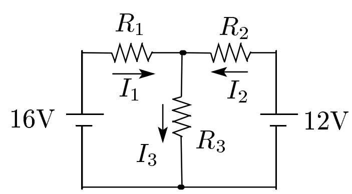
$D_2 = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$

クラメルの公式より $D \neq 0$ ならば、

$x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{\alpha d - b\beta}{ad - bc} \quad y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{a\beta - \alpha c}{ad - bc}$

物理への応用

図のような電気回路の抵抗 ($R_1 = 4.0[\Omega]$, $R_2 = 2.0[\Omega]$ $R_3 = 4.0[\Omega]$) に流れる電流 (I_1 , I_2 , I_3) を求めよ。



キルヒホッフの第一法則より、

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{a}$$

キルヒホッフの第二法則より

$$4I_1 + 4I_3 = 16 \tag{b}$$

$$2I_2 + 4I_3 = 12 \tag{c}$$

(a)(b)(c) の連立方程式を解いて、I_1, I_2, I_3 を求める。3 つの方程式を書き直すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{d}$$

ここで、次の行列式を計算する。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -32 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & 4 \\ 12 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -48$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 0 & 12 & 4 \end{vmatrix} = -32 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -80$$

クラメルの公式 (12.11) より、

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = 1.5[\mathrm{A}] \quad , \quad I_2 = \frac{D_2}{D} = 1.0[\mathrm{A}] \quad , \quad I_3 = \frac{D_3}{D} = 2.5[\mathrm{A}]$$

12.4　行列の固有値

$n \times n$ 正方行列 A により自分自身の λ 倍に変換される $n \times 1$ 列ベクトルを X とすると、

$$AX = \lambda X \tag{12.12}$$

λ を行列 A の固有値、X を A の固有ベクトルという。

$$det(A - \lambda E) = 0 \tag{12.13}$$

E は単位行列である。(12.13) を**特性方程式**という。この根を特性根という。

例題
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
固有値および固有ベクトルを求める。

（解）特性方程式は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$
$(3-\lambda)(-1-\lambda) = 0$ この式より、固有値は $\lambda = 3, -1$ である。
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\lambda = 3$ を代入すると、$x = y$, $\lambda = -1$ を代入すると $x = -y$ となるので、
$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
ここで、$\frac{1}{\sqrt{2}}$ は規格化定数である。

12.4.1　行列の対角化

同値変換

$n \times n$ 正則行列 S を用いて、$n \times n$ 行列 A に対して、$S^{-1}AS$ を作ることを同値変換または相似変換という。同値変換について次の性質がある。

- すべての $n \times n$ 行列は、同値変換により、主対角線上に固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が並んだ三角行列に変形することができる。
- 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ がすべて異なるとき、行列は同値変換により対角行列にすることができる。
- 正方小行列が主対角線上に並び、その他の要素がすべて 0 の行列にすることができる。
  $A = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & C_2 & \\ 0 & & C_k \end{pmatrix}$ ただし、$C_s = \begin{pmatrix} \lambda_s & 1 & 0 \\ & \lambda_s & \\ 0 & & \lambda_s \end{pmatrix}$
  この形を **Jordan の標準形**という。

対角化

固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトルを $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ とするとき、$S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ とおく。この行列 S を用いると、行列 A を対角化することができる。

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

12.5　2 次形式

$$\begin{aligned} Q &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\ &\quad +a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \cdots + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\ &\quad + \cdots + \cdots \\ &\quad +a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{aligned} \tag{12.14}$$

上の式のような実変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の 2 次の同時多項式を 2 次形式という。
複素数の係数を持つ複素変数の 2 次の同次多項式

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{z}_i z_j \tag{12.15}$$

この係数が $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ である場合、すなわち係数行列 $A = (a_{ij})$ がエルミート行列である場合、(12.15) をエルミート形式という。

(12.14) を係数行列および列ベクトル $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を用いて表すと、
$Q = X^T AX$ と書ける。行列 A を対角化する行列 S を見いだすとき、
$Q = X^T AX = X^T(S^{-1})^T S^{-1}ASS^{-1}X = Y^T A'Y = \sum a_{jj}y_j y_j$
$y_j y_i$ の項が含まれない形に書ける。この形を標準形という。
ここで、$Y = S^{-1}X$, $A' = S^{-1}AS$, $Y^T = X^T(S^{-1})^T$ とおいた。

12.6　行列および行列式の微分

行列の要素が変数 x の関数になっているような行列 A を考える。

$A = \begin{pmatrix} f(x) & \cdot & \cdot & g(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h(x) & \cdot & \cdot & k(x) \end{pmatrix}$

このとき、この行列の微分は

$$\frac{dA}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{df(x)}{dx} & \cdot & \cdot & \dfrac{dg(x)}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{dh(x)}{dx} & \cdot & \cdot & \dfrac{dk(x)}{dx} \end{pmatrix} \tag{12.16}$$

行列式 $D = det(A)$ の微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{dD}{dx} &= \begin{vmatrix} \frac{df(x)}{dx} & \cdot & \cdot & \frac{dg(x)}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h(x) & \cdot & \cdot & k(x) \end{vmatrix} \\
&+ \cdots + \cdots \\
&+ \begin{vmatrix} f(x) & \cdot & \cdot & g(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dh(x)}{dx} & \cdot & \cdot & \frac{dk(x)}{dx} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{12.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \frac{df(x)}{dx} & \cdot & \cdot & g(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dh(x)}{dx} & \cdot & \cdot & k(x) \end{vmatrix} \\
&+ \cdots + \cdots \\
&+ \begin{vmatrix} f(x) & \cdot & \cdot & \frac{dg(x)}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h(x) & \cdot & \cdot & \frac{dk(x)}{dx} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{12.18}
$$

索 引