問 1.1 同一の電荷 q を持つ小物体が互いに r 離れている場合に小物体に働く力 F_1 と同一の電荷 $q/2$ を持つ小物体が互いに $2r$ 離れている場合に小物体に働く力 F_2 を比較せよ．

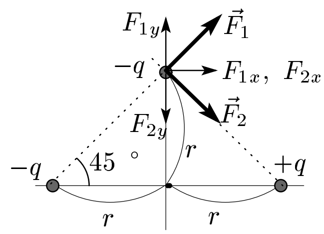
解 $F_1 = k\dfrac{q^2}{r^2},\ F_2 = k\dfrac{(q/2)^2}{(2r)^2} = k\dfrac{q^2}{16r^2} = \dfrac{1}{16}F_1$

問 1.2 真空中に，同一の電荷 Q を持つ小物体が互いに 1.0cm 離れている場合に小物体に働く力が 1.0N である．電荷 Q を求めよ．

解 $k_0\dfrac{Q^2}{(1.0\times10^{-2})^2} = 1.0$ より $Q = \sqrt{\dfrac{1.0\times10^{-4}}{8.988\times10^9}} = 1.05\times10^{-7}[C]$

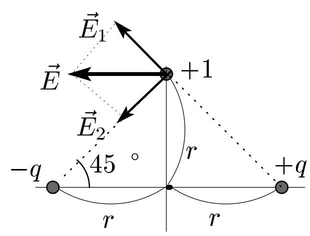
問 1.3 xy-座標の表現で $(-r,0)$ の点に電荷 $-q$ が $(r,0)$ の点に電荷 q がある場合，$(0,r)$ の点にある電荷 $-q$ をもつ小物体にはたらく力 $\vec{F}$ の x 成分 F_x, y 成分 F_y および $|\vec{F}|$ を求めよ．

解 電荷 $-q$ および $+q$ によるクーロン力を夫々$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ とすると，右図から $F_{1x} = F_{2x} = k\dfrac{q^2}{(\sqrt{2}\,r)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $F_{1y} = -F_{2y} = k\dfrac{q^2}{(\sqrt{2}\,r)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, したがって，$F_x = F_{1x}+F_{2x} = \dfrac{kq^2}{\sqrt{2}\,r^2}$, $F_y = F_{1y}+F_{2y} = 0$, また，$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2+F_y^2} = \dfrac{kq^2}{\sqrt{2}\,r^2}$



問 2.1 問 1.3 において座標 $(0,r)$ における電場 $\vec{E}$ の x 成分 E_x, y 成分 E_y および $|\vec{E}|$ を求めよ．

解 電荷 $-q$ および $+q$ による電場を夫々$\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ とすると，前問より $E_{1x} = E_{2x} = -k\dfrac{q}{(\sqrt{2}\,r)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $E_{1y} = -E_{2y} = -k\dfrac{q}{(\sqrt{2}\,r)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, したがって，$E_x = E_{1x}+E_{2x} = -\dfrac{kq}{\sqrt{2}\,r^2}$, $E_y = E_{1y}+E_{2y} = 0$, また，$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = \dfrac{kq}{\sqrt{2}\,r^2}$

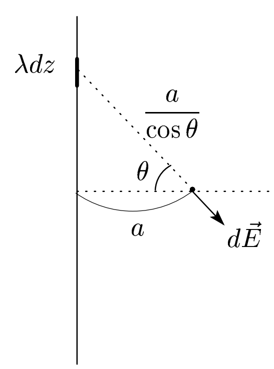


問 2.2 直線上に線密度 λ の電荷が一様に帯電している場合，直線から距離 a での電場を求めよ．

解 直線に垂直な方向を x 軸，直線にに沿って z 軸をとると，対称性から電場の方向は x 軸方向である．微小な dz の部分から電場 $d\vec{E}$ の大きさは右図より $|d\vec{E}| = k\dfrac{\lambda dz}{(a/\cos\theta)^2} = k\dfrac{\lambda\cos^2\theta dz}{a^2}$. $z = a\tan\theta$ であるから，$dz = a\cos^{-2}d\theta$ である[a]．したがって電場の x 成分は

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} k\frac{\lambda\cos^2\theta dz}{a^2}\cos\theta = \frac{k\lambda}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{k\lambda}{a}\ \sin\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\therefore\quad E_x = \frac{2k\lambda}{a}$$



---

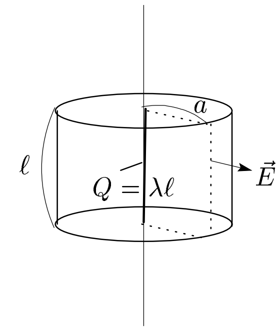
[a]

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \cos^{-2}x.$$

「 物理学 I,II を学ぶための数学」p.57 (8.13) 式参照

問 2.3 問 2.2 をガウスの法則を使って解け.

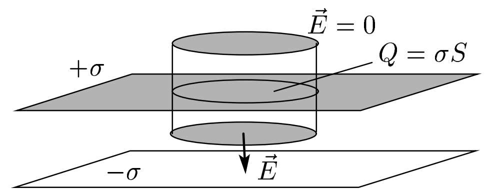
解 右図のように高さ ℓ, 半径 a の円筒を帯電した直線を囲むように描き，ガウスの法則を適用する．円筒内の電荷は $Q = \lambda\ell$ である．対称性から電場は円筒の底面と上面では平行であり $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$，円筒の側面に垂直であるので $\vec{E}\cdot\vec{n} = E$, したがって,



$$\int\int \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = 2\pi a\ell E = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon} \quad \therefore E = \frac{\lambda}{2\pi a\varepsilon} = \frac{2k\lambda}{a}$$

問 2.4 2 枚の非常に広い平面板を平行に置きそれぞれ電荷面密度 $-\sigma$, σ の電荷が一様に分布すると，平板間の電場が $E = \sigma/\varepsilon_0$ であることをガウスの法則を使って示せ.

解 右図のように底面積 S の円筒を描く．底面を平板間に置き，上面を平板の上方にした閉曲面に，ガウスの法則を適用する．円筒内の電荷は $Q = \sigma S$ である．対称性から電場は円筒の底面では下向きに面に垂直であるので $\vec{E}\cdot\vec{n} = E$，円筒の上面では $\vec{E} = 0$，円筒の側面では電場は面の法線に垂直であるから $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$ したがって,



$$\int\int \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad \therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

問 3.1 平面内の座標 $(-a,0)$ に電荷 $-Q$ が $(a,0)$ に電荷 Q がある場合，$(x,\,y)$ におけるポテンシャル $V(x,y)$ から (3.3) 式より電場 $\vec{E}\,(E_x,\,E_y)$ を求めよ．また，a が非常に小さい場合，$V(x,y) \cong k_0\dfrac{2aQx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ であることを示せ.

解 $V(x,y) = -k_0\dfrac{Q}{r_1} + k_0\dfrac{Q}{r_2}$．ただし，$r_1^2 = (x+a)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x-a)^2 + y^2$. したがって[1],

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial x} = -\frac{k_0 Q}{r_1^2}\frac{(x+a)}{r_1} - \frac{k_0 Q}{r_2^2}\frac{(x-a)}{r_2}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial y} = -\frac{k_0 Q}{r_1^2}\frac{y}{r_1} - \frac{k_0 Q}{r_2^2}\frac{y}{r_2}$$

a が非常に小さい場合，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと，$\{(x\pm a)^2 + y^2\}^{-1/2} \cong r^{-1}\left(1 \pm \dfrac{2ax}{r^2}\right)^{-1/2}$.

$\therefore\quad \dfrac{1}{r_1} \cong \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{ax}{r^2}\right),\ \dfrac{1}{r_2} \cong \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{ax}{r^2}\right)$. 故に，$V(x,y) \cong k_0\dfrac{2aQx}{r^3}$.

なお，電場についても同様な近似によって簡単な表現を得ることができる．[2]

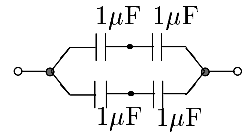
---

[1] $\dfrac{\partial r_1}{\partial x} = \dfrac{x+a}{r_1},\ \dfrac{\partial r_2}{\partial x} = \dfrac{x-a}{r_2},\ \dfrac{\partial r_1}{\partial y} = \dfrac{y}{r_1},\ \dfrac{\partial r_2}{\partial y} = \dfrac{y}{r_2}$

[2] $\{(x\pm a)^2 + y^2\}^{-3/2} \cong r^{-3}\left(1 \pm \dfrac{2ax}{r^2}\right)^{-3/2}$. $\quad\therefore\quad \dfrac{1}{r_1^3} \cong \dfrac{1}{r^3}\left(1 - \dfrac{3ax}{r^2}\right),\ \dfrac{1}{r_2^3} \cong \dfrac{1}{r^3}\left(1 + \dfrac{3ax}{r^2}\right)$.

故に，$E_x \cong -\dfrac{2k_0 aQ}{r^3}\left(1 - \dfrac{3x^2}{r^2}\right),\ E_y \cong \dfrac{6k_0 aQxy}{r^5}$

問 4.1 右図のコンデンサーの合成電気容量を求めよ．



解 合成電気容量 $= \dfrac{1\times 1}{1+1} + \dfrac{1\times 1}{1+1} = 1[\mu\ \mathrm{F}]$

問 4.2 一辺の長さが 8cm の正方形の金属板 2 枚の間が 1mm の平板コンデンサーの電気容量を求めよ．

解 電気容量 $= \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} = \dfrac{8.854\times 10^{-12}(0.08)^2}{10^{-3}} = 5.67\times 10^{-11}\mathrm{F} = 56.7\mathrm{pF}$

問 4.3 100μF のコンデンサーの両端の電位差を 10V に保つと蓄えられた電荷および静電エネルギーはいくらか．

解 静電エネルギー $= \dfrac{1}{2}\times 100\times 10^{-6}\times 10^2 = 5\times 10^{-3}\mathrm{J}$

問 5.1 1A の電流が流れている針金ではその断面において 1 秒間に電子は何個通過するか．

解 電子 1 個の電荷量は 1.60×10^{-19}C であるから 1A(=1C/s) では針金ではその断面において 1 秒間に $\dfrac{1}{1.60\times 10^{-19}} = 6.25\times 10^{18}$ 個の電子が通過する．

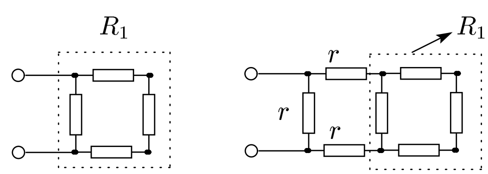
問 5.2 直径 2mm, 長さ 1m の銅線の電気抵抗はいくらか．

解 $R = \rho\dfrac{\ell}{S} = 1.62\times 10^{-8}\dfrac{1}{\pi(1\times 10^{-3})^2} = 5.16\times 10^{-3}\ \Omega$

問 5.3 1kWh を単位 J(ジュール) で表せ．

解 1h=60×60=3600s, $\therefore$ 1kWh=$10^3\times 3600 = 3.6\times 10^6$J.

問 5.4 右図の抵抗値がすべて r であるとして，合成抵抗 1 と合成抵抗 2 のそれぞれの抵抗値を求めよ．また，右端に 3 個の抵抗を次々に追加すると合成抵抗はどの値に収束するか．



合成抵抗 1　　合成抵抗 2

解 合成抵抗 1 および合成抵抗 2 の抵抗値をそれぞれ R_1，R_2 とすると，

$R_1 = \dfrac{r\times 3r}{4r} = \dfrac{3}{4}r = 0.750\,r$

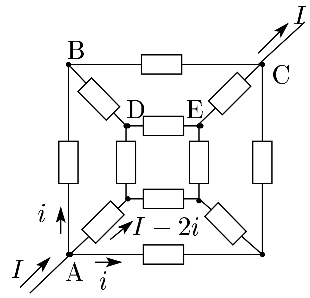
$R_2 = \dfrac{r(2r+R_1)}{3r+R_1} = \dfrac{2+3/4}{3+3/4}r = \dfrac{11}{15}r = 0.733\,r$

$R_n = \dfrac{r(2r+R_{n-1})}{3r+R_{n-1}}$, $n\to\infty$ では $R_{n-1} = R_n = R$ に収束するとして $R = \dfrac{r(2r+R)}{3r+R}$

$\therefore$ $R^2 + 2R - 2r^2 = 0$ より $R = -r\pm\sqrt{3}r$．題意より $-$ は不適なので $R = (\sqrt{3}-1)r = 0.732r$

問 5.5 右図の回路において，A から電流 I が流れ込み C から出る場合には合成抵抗は $3r/4$ であることを示せ．

（ヒント: 対称性から B と D が同電位で共に AC 間の電位 V_{AD} の 1/2 であることを使え．）



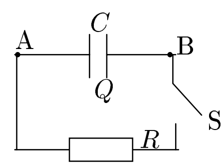
解 $V_{AB} = ri = V_{AD} = r(I-2r) + r\dfrac{I-2r}{2}$,

$\therefore \quad i = \dfrac{3}{8}I, \quad V_{AC} = 2ri = \dfrac{3}{4}rI,$　従って合成抵抗は $\dfrac{3}{4}r$

問 5.6 抵抗 R と電気容量 C との積 RC が時間の単位をもつことを示せ．

解 $[R] = \dfrac{[V]}{[I]}$, $[C] = \dfrac{[Q]}{[V]}$ より，$[RC] = \dfrac{[Q]}{[I]}$, 然るに，$I = \dfrac{dQ}{dt}$ であるから $[RC] = [s]$ である．

問 5.7 右図の回路において，スイッチを入れてからの経過時間 t 後における電荷 $Q(t)$ は次式で与えられることを示せ．ただし，最初コンデンサーに電荷 Q_0 が充電されていたものとする．



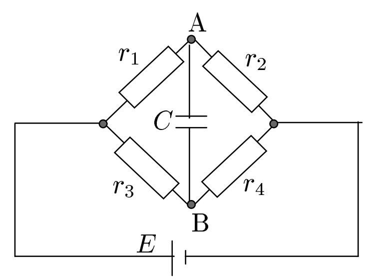
$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

解 回路における電流は電荷量の減少量に比例するから $I = -\dfrac{dQ}{dt}$, AB 間の電位は $V = \dfrac{Q}{C} = RI$ であるから

$\dfrac{Q}{C} = R\dfrac{dQ}{dt}$, 従って，$\dfrac{dQ}{Q} = -\dfrac{dt}{RC}$, $\therefore \quad \ln Q = -\dfrac{t}{RC} + \mathrm{const.}$, 或いは $Q = A\mathrm{e}^{-t/(RC)}$,

定数 A は初期条件 $t = 0$ において $Q = Q_0$ より $A = Q_0$ を得る．$\therefore \quad Q = Q_0\mathrm{e}^{-t/(RC)}$

問 5.8 右図のように抵抗値 r_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ の抵抗 4 個と電気容量 C のコンデンサーおよび起電力 E の電池からなる回路がある．AB 間の電位差 V およびコンデンサーに充電されている電荷 Q を求めよ．



解 電池を流れる電流 $I = E/R$ とすると合成抵抗は

$$R = \frac{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}{r_1+r_2+r_3+r_4},$$

A 側を流れる電流を i とすると，$i = \dfrac{R}{r_1+r_2}I$ であるから，

AB 間の電位差 $V_{AB} = r_1 i - r_3(I-i) = (r_1+r_3)i - r_3 I$ である．

$\therefore \quad Q = CV_{AB} = C\{(r_1+r_3)i - r_3 I\} = CE\left\{\dfrac{r_1+r_3}{r_1+r_2} - r_3\dfrac{r_1+r_2+r_3+r_4}{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}\right\} = CE\dfrac{r_1r_4 - r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}$