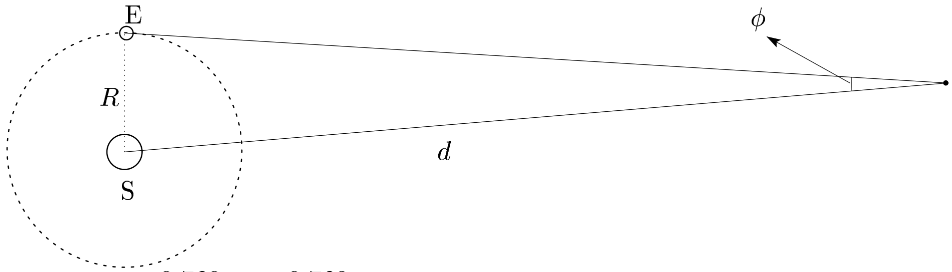
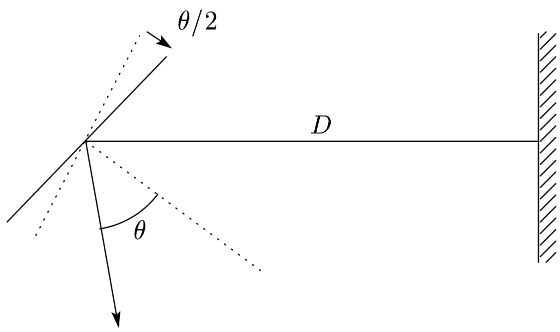
問 1.1　太陽、地球間の距離 R は 1.5×10^{11}m であるから下の図を参考にして



ϕ=0.760 秒=$\dfrac{0.760}{3600}$度$=\dfrac{0.760}{3600}\dfrac{\pi}{180}=3.78\times 10^{-6}$[rad](ラジアン) であるから

$d\cdot\phi=R$ より $d=\dfrac{R}{\phi}=\dfrac{1.5\times 10^{11}}{3.68\times 10^{-6}}=4.1\times 10^{16}$[m]

問 1.2　下の図のように光線が θ だけずれて引き返す場合には鏡は $\theta/2$ だけ回転したことになる.



１回転するに要する時間は $60/27000=2.222\times 10^{-3}$s(秒) である．$\theta/2=15\,^\circ=\dfrac{15}{360}$ 回転するに要する時間を t とすると，$D=\dfrac{ct}{2}=\dfrac{1}{2}\times 3.0\times 10^{8}\times 2.222\times 10^{-3}\times\dfrac{15}{360}=1.4\times 10^{4}$[m]

問 1.3　(a) 水 1L の質量は 1kg であるから濃度は $\dfrac{176}{5000+176}\times 100=3.40$ %

(b) 食塩を水に溶かした場合，溶液の体積は変わらないと考えられるので，求める溶液の体積を V とすると $\dfrac{10}{10+V}\times 100=3.40$ より，$V=\dfrac{1000}{3.4}-10=284[\mathrm{cm}^3]$

(c) 食塩が完全に溶けた場合溶液の体積に変化しないと考えられるので，食塩の密度は $\rho=\dfrac{176}{5000}=0.0352[\mathrm{g/cm}^3]$. したがって問題は (a) 食塩の密度を求めよ．(b)10g を含む食塩水の体積を求めよ．と書き直せる．

(d) 食塩の量を x[g]，水の体積を V とすると，$V=\dfrac{x}{\rho}=28.4\,x$ であるから正比例のグラフから $x=10$ での $V=284$ を読み取ることができる．

問 1.4　(a) 腕の長さは 1 次元であるから体積の 1/3 乗，すなわち $(0.51)^{1/3}=0.80$

(b) 表面積は体積の 2/3 乗，すなわち $(0.51)^{2/3}=0.64$

問 1.5　ロープの長さ $=2\pi(R+\Delta R)=2\pi R+2\pi\Delta R$ である．したがって，継ぎ足したロープの長さは $2\pi\Delta R=60$cm であるから，浮き上がる高さ $\Delta R=\dfrac{60}{2\pi}=9.5$cm

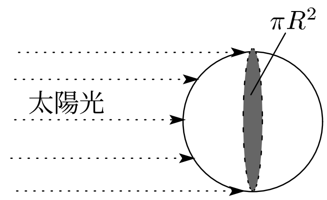
問 1.6　$F\propto\dfrac{v^2}{r}$ であるから，力は $\dfrac{2.35^2}{1.76}=3.14$ 倍になる．

問 1.7　$[c_s]$=LT^{-1}，$[\rho]$=ML^{-3}，$[p]$[1]=MLT^{-2}L^{-2}=ML^{-1}T^{-2}．$c_s \simeq \rho^x p^y$ とすると，
LT^{-1}=M^{x}L^{-3x}· M^{y}L^{-y}T^{-2y}．$\therefore\ x+y=0,\ -3x-y=1,\ -2y=-1,$
したがって，$y=1/2,\ x=-1/2$ すなわち，$c_s \simeq \sqrt{p/\rho}$

問 1.8　$[v]$=LT^{-1}，$[h]$=L，$[g]$=LT^{-2}．$v=h^x g^y$ とすると，LT^{-1}=L^{x}L^{y}T^{-2y}．
$\therefore\ x+y=1,\ -2y=-1$ より，$y=1/2,\ x=1/2$．したがって，$v=\sqrt{hg}$

問 1.9　衝撃面の走る速さを v とする．$[v]$=LT^{-1}，$[\rho]$=ML^{-3}，$[E]$=ML^{2}T^{-2}，$[r]$=L．
$v=\rho^x E^y r^z$ とすると，LT^{-1}=M^{x}L^{-3x}M^{y}L^{2y}T^{-2y}L^z．$\therefore x+y=0,\ -3x+2y+z=1,\ -2y=-1$
より $x=-1/2,\ y=1/2,\ z=-3/2$．したがって，$v=\sqrt{\dfrac{E}{\rho r^3}}$

問 1.10　太陽からの光は図のように地球の片方の面に照射されている[2]．赤道当たりは地表に正対しているが日本のように緯度が高い場合には地表に対して斜めから光を受け弱くなる．このことを考慮すると地球全体として地球の断面（面積 πR^2）に垂直に照射したことになる．また，1 日は $60\times60\times24=8.64\times10^4$s であるので 1 日に太陽から受けるエネルギー E は



$$E=1.37\times10^3\pi\times(6.4\times10^6)^2\times8.64\times10^4=1.52\times10^{22}\mathrm{J}$$

問 1.11　(1) 加速度：m s^{-2}，力：kg m s^{-2}，エネルギー：kg m^2 s^{-2}
(2) 角速度：s^{-1}，角運動量：運動量×長さであるから kg m^{2}s^{-1}
(3)$F=Gmm'/r^2$ より $[G]$=$[F\,r^2][m^{-2}]$=kg m s^{-2} m^2 kg^{-2}=kg^{-1} m^3 s^{-2}
(4)$[k]$=$[F]/[x]$ より $[k]$=kg m s^{-2} m^{-1}=kg s^{-2}

問 1.12　下の表のように $\dfrac{\theta-\sin\theta}{\sin\theta}<0.001$ である条件は $\theta<0.24$ である．

θ	0.2300	0.2400	0.2500	0.2600
$\sin\theta$	0.2279	0.2377	0.2474	0.2571
$\theta-\sin\theta$	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029
$\frac{\theta-\sin\theta}{\sin\theta}$	0.0088	0.0097	0.0105	0.0113

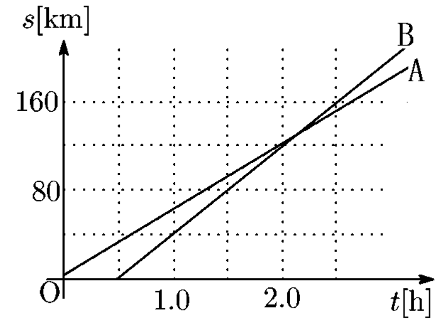
問 2.3　グラフより，速度は時刻 0 から右の面積で得られる．各時刻での速度は下の表のようになる．これよりグラフに描けばよい．

時刻 (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
速度 (m/s)	0	-1	-3	-3	-1	2	3	4	2	0	-2

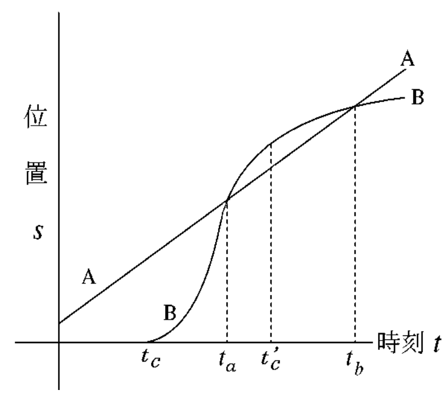
問 2.4　(1)$\Delta x=a(t_2^2-t_1^2)+b(t_2-t_1)$　(2) $<v>=\dfrac{\Delta x}{t_2-t_1}=a(t_2+t_1)+b$
(3)$\lim_{t_2\to t_1}\Delta x=2at_1+b\ldots(*)$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=t_1}=2at_1+b$．これは $(*)$ に等しい．

[1]圧力は単位面積にはたらく力である。力=質量 × 加速度．∴[力]=MLT^{-2}．
[2]1 ワットは 1 秒当たりのエネルギー量（ジュール）であるから，W=J/s である．

問 2.1　A は $t=0.5\text{h}$ では
$s_A = 4 + 60 \times 0.5 = 34\text{km}$ 先にいる．
B は相対速度 $80 - 60 = 20\text{km/h}$ で距離 34km を縮め，追いつくには $34/20 = 1.7\text{h}$ 要する．したがって，
(1) 追い越す時間は $t = 0.5 + 1.7 = 2.2\text{h}$.
(2) $s_A = s_B = 4 + 60 \times 2.2 = 136\text{km}$ の地点.
(3) 1.7h
(4) $136 - 4 = 132\text{km}$,　$s_A = 60t + 4$,
$s_B = 80(t - 0.5)$, $s_A = s_B$ より, $t = 2.2\text{h}$
右図参照



問 2.2
(a) t_a は右図に示されている．
(b) B の接線の傾きが A の傾きより小さいので，A の方が B より速い.
(c) B の接線の傾きが A の傾きと同じ位置を右図の t_c, t_c' に示す.
(d) (1) 下に凸の部分：時刻 t_c から t_a の区間
　(2) 上に凸の部分：t_a 以後の時刻
　(3) 変曲点の時点：t_a の時刻



問 2.5　AB の距離を L[km], 往路での時間を t_1[h], 帰路での時間を t_2[h] とすると，
$L = 4t_1 = 16t_2$, $\therefore\ t_1 = L/4,\ t_2 = L/16$ であるから,
平均の時速は $< v >= \dfrac{2L}{t_1 + t_2} = \dfrac{2L}{L/4 + L/16} = \dfrac{2 \times 16}{4+1} = 6.4\,\text{km/h}$

問 2.6　$\dfrac{dx}{dt} = a\omega\cos(\omega t),\ \dfrac{dy}{dt} = -a\omega\sin(\omega t)$

問 2.7　(1)$\Delta s = r\Delta\theta$　(2)$< v >= \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = r\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$　(3)$v = \lim_{\Delta t\to 0} = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$

問 3.1　加速度は $\dfrac{F}{m}$ であるから，$v = v_0 + \displaystyle\int_0^t \frac{F}{m}dt = v_0 + \frac{F}{m}t$

問 3.2　(1) $a = -\dfrac{F}{m}$　(2) $v_0 + \displaystyle\int_0^t \left(-\frac{F}{m}\right)dt = v_0 - \frac{F}{m}t = 0,\ \therefore\ t = \frac{mv_0}{F}$

問 3.3　(1) 時刻 t[s] での車の位置を x[m] とすると，$M\dfrac{d^2x}{dt^2} = -F$
　(2) $t = 0,\ x = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = v_0 = 90(\text{km/h}) = 25(\text{m/s})$
　(3) $v = v_0 - \dfrac{F}{M}t = 0$ より $F = \dfrac{Mv_0}{t} = \dfrac{1000 \times 25}{6} = 4.1 \times 10^3\text{N}$

問 3.4　(1) $m_A a_A = T$　(2) $m_B a_B = F - T$

(3) A, B とも同じ加速度で運動するから，$a_A = a_B$ である．上の 2 式より $a_A = \dfrac{F}{m_A + m_B}$

(4) $T = m_A a_A = \dfrac{m_A}{m_A + m_B} F$

問 3.5　(1) 水平台での座標を（右を正として）x とすると，$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = T \ \ldots \ (*)$

(2) おもりの位置を（下を正として）y とすると，$M\dfrac{d^2y}{dt^2} = Mg - T \ \ldots \ (**)$

(3) 糸がたるまないから $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$．したがって，$(*) + (**)$ より $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{M}{m+M}g$

(4) $(*)$ より張力は $T = \dfrac{mMg}{m+M}$

問 3.6　(1) 力＝質量×加速度であるから，傾きが質量に対応する．A,B,C の質量をそれぞれ m_A, m_B, m_C とすると $m_A = 4m_B$，$m_C = 16m_B$

(2) 引っ張る力は質量に反比例することを利用すればよい

問 4.1　(1) $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ より $\cos\theta = \dfrac{0\cdot\sqrt{3} + 1\cdot 0}{AB} = 0.\ \therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$ (=90 °)

(2) $\vec{C} = (0,1) + (\sqrt{3},0) = (\sqrt{3},1)$，$C = |\vec{C}| = \sqrt{3+1} = 2$

(3) $\vec{D} = (0,1) - (\sqrt{3},0) = (-\sqrt{3},1)$，$D = |\vec{D}| = \sqrt{3+1} = 2$

(4) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}) + 1\cdot 1}{2\cdot 2} = -\dfrac{1}{2}.\ \therefore\ \theta = \dfrac{2\pi}{3}$ (=120 °)

問 4.2　(1) $\vec{B}$ 方向の単位ベクトルは $\vec{e} = \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{(3,6,2)}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \dfrac{(3,6,2)}{7}$.

$\therefore\ |\vec{A}_B| = \vec{A}\cdot\vec{e} = \dfrac{1\cdot 3 + 5\cdot 6 + 4\cdot 2}{7} = \dfrac{41}{7}$　(2) $\vec{A}_B = |\vec{A}_B|\vec{e} = \dfrac{41}{49}(3,6,2)$

問 4.3　(1) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0$

(2) $\vec{c}^{\,2} = c^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - \theta) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

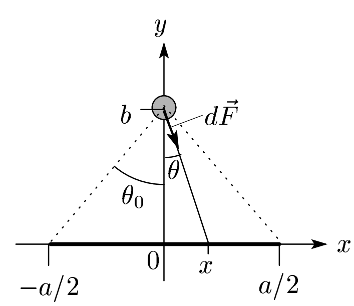
(3) $A = \dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{2} = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$，　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}}$

$= \dfrac{1}{2ab}\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)} = \dfrac{1}{2ab}\sqrt{(a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)}$

$a + b + c = 2s$ とおくと，$a+b-c = 2(s-c)$，$c-a+b = 2(s-a)$，$c+a-b = 2(s-b)$，

従って、$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.　これを**ヘロンの公式**という.

問 4.4　棒の線密度は $c = \dfrac{M}{a}$ である．右図を参考にすると，棒の中心から x の位置における dx からの万有引力の y 成分は $dF_y = -G\dfrac{mc\,dx}{x^2+b^2}\cos\theta$，この積分は積分変数 x を関係 $x = b\tan\theta$，$dx = b\cos^{-2}\theta d\theta$，$\tan^2\theta + 1 = \cos^{-2}\theta$ を使って θ に変換すると，



$$F_y = -\frac{GmM}{ab}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta = -\frac{GMm}{b}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}},$$

で与えられる[3]．x 成分 F_x は対称性から 0 であることがわかる．

問 4.5　(1) $(x,\, y) = (r\cos\omega t,\, r\sin\omega t)$　(2) $v_x = \dfrac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t,\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = r\omega\cos\omega t$

(3) $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t,\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -r\omega^2\sin\omega t$

(4) $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega,\ |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

(5) $\vec{v}\cdot\vec{a} = v_x a_x + v_y a_y = r^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t - r^2\omega^3\cos\omega t\sin\omega t = 0,\ \therefore\ \vec{v}\perp\vec{a}$

問 4.6　(1) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = -A\omega\sin\omega t\,\vec{i} + A\omega\cos\omega t\,\vec{j} + v_0\,\vec{k}$

(2) $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m(-A\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - A\omega^2\sin\omega t\,\vec{j})$

(3) $x^2 + y^2 = A^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = A^2,\ z = v_0 t,$ であるから z 方向に一定の速さ v_0 で運動する半径 A の螺旋軌道である．

(4) 運動エネルギー $E = \dfrac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} = \dfrac{1}{2}m(A^2\omega^2 + v_0^2)$

問 4.7　(1) $v' = \sqrt{v^2 + V^2}$　(2) $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{v}\ \therefore\ v = 5\sqrt{3} = 8.7\text{m/s}$

問 4.8　人の速さを v とし，風が北から測って γ °の方向から速さ V で吹いているものとすると，風の速さの東方向の成分は $V\sin\gamma$，南方向の成分は $V\cos\gamma$ である．したがって

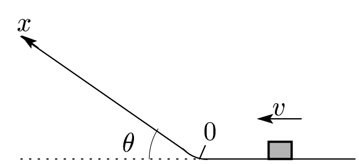
$$\text{真東の場合，}\quad \frac{V\sin\gamma - v}{V\cos\gamma} = \tan\alpha,\quad \text{真北の場合，}\quad \frac{V\sin\gamma}{V\cos\gamma + v} = \tan\beta$$

上の 2 式から v を消去すると，

$$V(\cos\gamma + \sin\gamma) = V\left(\tan\alpha\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\tan\beta}\right)$$

両辺を $\cos\gamma$ で割って整理すると　$\tan\gamma = \dfrac{(1-\tan\alpha)\tan\beta}{1-\tan\beta}$　を得る．

問 5.1　右図のように斜面の上向きに x 軸をとると、斜面上での加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\theta$. したがって速度 $\dfrac{dx}{dt} = v - \int_0^t g\sin\theta dt = v - g\sin\theta\ t$. 最高点では速度が 0 であるから時間 $t = \dfrac{v}{g\sin\theta}$.



その時の位置は $x = vt - \dfrac{1}{2}g\sin\theta\ t^2 = v\dfrac{v}{g\sin\theta} - \dfrac{1}{2}g\sin\theta\ \left(\dfrac{v}{g\sin\theta}\right)^2 = \dfrac{v^2}{2g\sin\theta}$.

問 5.2　(1) 最高点に達するまでに要した時間を t とすると，$h = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{9.8\times 2^2}{2} = 19.6\,\text{m}$

(2) $v_0 - gt = 0$ より，$v_0 = gt = 9.8\times 2 = 19.6\,\text{m/s}$

問 5.3　(1) $a = \dfrac{1}{2}gt_1^2$ であるから $t_1 = \sqrt{\dfrac{2a}{g}}$　(2) (1) と同様にして，$t_2 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

---

[3] $\displaystyle\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta = 2\sin\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{(a/2)^2 + b^2}}$

(3) 第2の石の最初の高さは $h-b$ であるから，$t_3=\sqrt{\dfrac{2(h-b)}{g}}$ (4) 題意から $t_3=t_2-t_1$ であるから $\sqrt{h-b}=\sqrt{h}-\sqrt{a}$, $\therefore\ h-b=h+a-2\sqrt{ah}$，したがって，$h=\dfrac{(a+b)^2}{4a}$.

問 5.4 (1) $v_y=V_0\sin\theta-gt$, である．最高点では $v_y=0$ であるからそこでの時刻は $t_1=\dfrac{V_0\sin\theta}{g}$.

(2) $h=V_0\sin\theta\ t_1-\dfrac{1}{2}gt_1^2=\dfrac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}$. (3) $x_1=V_0\cos\theta\ (2t_1)=\dfrac{2V_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}$

問 5.5 時刻 t での小物体の速度は $\vec{v}=(v_0,\ -gt)$ である．地上では $-h=-\dfrac{1}{2}gt^2$ であるから，$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. 地上での速度は $\vec{v}=(v_0,\ -\sqrt{2gh})$，$\therefore$ 速さ $v=|\vec{v}|=\sqrt{v_0^2+2gh}$

問 5.6 $x=v_0t,\ h=\dfrac{1}{2}gt^2$，の2式から t を消去して，$x=\sqrt{\dfrac{2hv_0^2}{g}}$.

然るに $v_0=250\,\mathrm{km/h}=\dfrac{250000}{3600}\mathrm{m/s}=69.4\,\mathrm{m/s}$. $x=\sqrt{\dfrac{2\cdot 200\cdot 69.4^2}{9.8}}\,\mathrm{m}=443\,\mathrm{m}$. 有効数字2桁として $x=440\,\mathrm{m}$

問 6.1 (1) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$ の解は $x=A\cos(\omega t+\delta)$, $v=\dfrac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\delta)$, ただし，$\omega^2=k/m$ である．初期条件を考慮すると $A\cos\delta=a$, $-A\omega\sin\delta=0$. $\therefore\ \delta=0$, $A=a$, 従って，$x=a\cos\omega t$ を得る．

(2) 周期 T は，$\omega T=2\pi$ を満たすので，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

問 6.2 (1) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$ (2) 初期条件は $t=0$ の時，$x=a$, $v=\dfrac{dx}{dt}=0$ である．

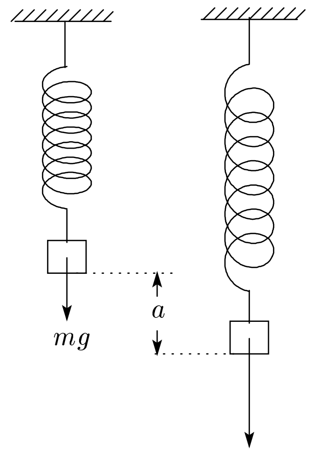
問 6.3 (1) 水平方向の力は $F=-kx$ (2) 運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$ (3) 初期条件は $t=0$ の時，$x=0$, $v=\dfrac{dx}{dt}=v_0$ (4) 初期条件より，$x(0)=A\sin\delta=0$, $\therefore\ \delta=0$. また，$\dfrac{dx}{dt}=A\omega\cos\omega t$ より，$v_0=A\omega$ $\therefore\ A=\dfrac{v_0}{\omega}$, 従って，$x(t)=\dfrac{v_0}{\omega}\cos\omega t$. (5) x の最大値は振幅 $\dfrac{v_0}{\omega}$ である．

問 6.4 (1) 重力 Mg は排除した水の質量による浮力 $\ell S\rho g$ と等しいので $M=\ell S\rho\ldots(*)$ である．(2) 微分方程式 $M\dfrac{d^2x}{dt^2}=Mg-(\ell+x)S\rho g$ が成り立つ．$(*)$ より，$M\dfrac{d^2x}{dt^2}=-xS\rho g$, $\therefore\ \dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{g}{\ell}x$

(3) 上式より角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$, $\therefore$ 周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

問 6.6 物体の質量を m, ゴムの弾性定数 k とすると，題意から $mg=k\ell$.
$\therefore\ k=\dfrac{mg}{\ell}$. 物体の位置 x の運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$ である．
初期条件は $t=0$, $x=0$, $\dfrac{dx}{dt}=v$ である．$x=A\sin(\omega t+\delta)$, $\dfrac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\delta)$ より，初期条件を考慮すると，$A\sin\delta=0$, $v=A\omega\cos\delta$. $\therefore\ \delta=0$, $A=\dfrac{v}{\omega}$, ただし $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$. すなわち，物体は振幅 $A=\dfrac{v}{\omega}=v\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$, 周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ で単振動をする．数値を代入すると $A=8.6\,\mathrm{cm}$, $T=0.90\,\mathrm{s}$.

問 6.5　釣り合いの条件より $mg = k\Delta x$, $\therefore\ k = \dfrac{mg}{\Delta x}$.
右図のように下方に力 F をかけると, ばねはさらに a だけ伸びる．その後 $F = 0$ とすると
初期条件 $t = 0$, のとき, $x = a$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$,
運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + \Delta x)$ で運動する．
$k = \dfrac{mg}{\Delta x}$ を代入すると，$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$. したがって，角振動数 ω とすると，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であるから，周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である．



問 6.7　器の底を原点とし，半径 R の円弧にそって s における質量 m の小物体の運動方程式は $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = -mg\dfrac{s}{R}$ であるから周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0.2}{9.8}} = 0.90\,\mathrm{s}$

問 6.8　糸の張力を S とし，P の鉛直方向の微小変位を x とすると，P の運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2S\dfrac{x}{\ell/2}$ である．ただし，$S = Mg$. 従って，P の振動の周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\ell}{4S}} = \pi\sqrt{\dfrac{m\ell}{Mg}}$

問 7.1　(1) 斜面方向の F の成分は $F\cos\theta$ であるから F のした仕事は $F\ell\cos\theta$
(2) 移動した高さは $\ell\sin\theta$ であるから，重力 Mg は下方に向いているので仕事は $-Mg\ell\sin\theta$

問 7.2　(1) 高さ $\ell\sin\theta$ からの運動であるから $W_1 = Mg\ell\sin\theta$
(2) P が斜面から受ける抗力は $Mg\cos\theta$，運動摩擦力は $-\mu' Mg\cos\theta$. $\therefore\ W_2 = -\mu' Mg\ell\cos\theta$

問 7.3　一定の重力 $-mg$ がかかっているので仕事 $W = \displaystyle\int_0^h (-mg)dz = -mgh$

問 7.4　仕事 $W = \displaystyle\int_0^a (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^a = -\frac{1}{2}ka^2$

問 7.5　仕事 $W = \displaystyle\int_\infty^r \left(-\frac{a}{r^2}\right)dr = \frac{a}{r}\Big|_\infty^r = \frac{a}{r}$

問 7.6　仕事 $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy)$ である．
：$y = \dfrac{b}{a}x$ であるから，$W = \displaystyle\int_0^a p\frac{b}{a}dx + \int_0^b q dy = \frac{1}{2}pba + qb$
II：AB 間は $y = 0$ であるから $F_x = 0$, $\therefore\ W = W_{AB} + W_{BC} = \displaystyle\int_0^a 0dx + \int_0^b qdy = qb$
III：CD 間は $y = b$ であるから，$W = W_{AD} + W_{DC} = \displaystyle\int_0^b qdy + \int_0^a pbdx = qb + pba$

問 7.7　$\dfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = Pt$ より，$P = \dfrac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2t}$

問 7.8　列車の質量 M, 速度 v, 傾斜角 θ，摩擦力 F, 重力加速度 g とする．垂直方向には $v\sin\theta$

の速さで上昇するので，重力に対するパワー $P_1 = Mg \cdot v \sin\theta$, 斜面に沿った抵抗に対するパワー $P_2 = Fv$ である．$\therefore\ P = P_1 + P_2 = (Mg\sin\theta + F)v$, $\sin\theta \simeq \tan\theta = \dfrac{1}{800}$, $Mg = 75 \times 10^3 \times 9.8$, $F = 75 \times 3 \times 9.8$, $v = \dfrac{60 \times 10^3}{3600}$ であるから，$P = 5.2 \times 10^4\,\mathrm{W}$ を得る．

問 8.1　地上よりの高さを z とすると，重力に対するポテンシャルは $U_g = -\int_0^z (-g)dy = gz$. ばねの自然長よりの伸びを x とするとばねの弾性力のポテンシャルは $U = -\int_0^x (-kx)dx = \dfrac{1}{2}x^2$

問 8.2　P の速さを v とすると，全エネルギー $\dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}mv^2$ であるから，$v = x\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

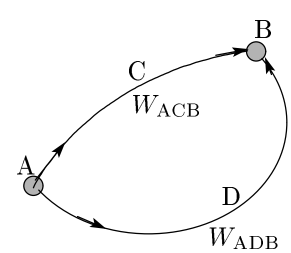
問 8.3　ばねの自然長よりの伸びを x とすると，ばねに蓄えられた弾性力のポテンシャルエネルギーが減少した重力のポテンシャルエネルギーに等しいから $\dfrac{1}{2}kx^2 = mgx$. $\therefore\quad x = \dfrac{2mg}{k}$.

問 8.4　はじめの位置エネルギーが 0，運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}mv_0^2$ であるから，任意の時刻 t において，常に，それらの和 $\dfrac{1}{2}mv_0^2$ である．

問 8.5　最高の高さのとき速度の鉛直成分は 0 であるから $mgh + \dfrac{1}{2}mv^2\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}mv^2$ が成り立つ．従って，$h = \dfrac{mv^2\sin^2\theta}{2g}$.

問 8.6　重力のした仕事は $Mg\ell\sin\theta$．これが運動エネルギー $\dfrac{1}{2}Mv^2$ に等しいから，$v = \sqrt{2g\ell\sin\theta}$.

問 8.7　右図のように A から C を経由して B に到着する経路でした仕事が W_{ACB}, A から D を経由して B に到着する経路でした仕事が W_{ADB} であったとする．この空間において働いている力が保存力場でないとすると経路の違いによってした仕事に相違が生じるので $W_{\mathrm{ACB}} \neq W_{\mathrm{ADB}}$. $W_{\mathrm{ACB}} > W_{\mathrm{ADB}}$ であるとすると，A から C を経由して B に到り，さらに D を経由して A に戻るとこの間にした仕事 $\Delta W = W_{\mathrm{ACB}} - W_{\mathrm{ADB}} > 0$ となり仕事がされたことになる．すなわち，外部からエネルギーが吸収されたことになり，永久機関が可能になる．現実にはこのようなことはあり得ない．



問 9.1　人が台から受ける力を F とすると，台が人から受ける力は「作用反作用の法則」より $-F$, したがって $M\dfrac{x_1^2}{dt^2} = F$, $m\dfrac{x_2^2}{dt^2} = -F$. 故に，$\dfrac{dx_G^2}{dt^2} = 0$, したがって，$\dfrac{dx_G}{dt} =$ 一定．ところが，重心の初速度が 0 であるので人が移動する前後での重心の位置は変わらない．移動後の重心の位置は $x'_G = \dfrac{M(x_1 + L) + m(x_2 - (\ell - L))}{M + m}$ であるから，$x'_G = x_G$ より $L = \dfrac{m}{M+m}\ell$.

問 9.2　ボールの速さを v, A, B の速さをそれぞれ V_A, V_B とすると，A とボールの関係から，$M_AV_A + mv = 0$. B とボールの関係から $(m + M_B)V_B = mv$. したがって，A は $V_A = -\dfrac{m}{M_A}v$ の速さで運動し，B は $V_B = -\dfrac{m}{m + M_B}v$ の速さで運動する．

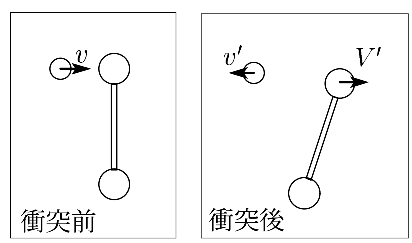
問 9.3　(1) B の運動方程式は $m_2\dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F}$.　(2) B からみた A の位置は $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ であるから，$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \dfrac{\vec{F}}{m_1} + \dfrac{\vec{F}}{m_2} = \dfrac{\vec{F}}{\mu} = \dfrac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\vec{F}$.　(3) $\mu\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ より，$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ を得る．　(4) 運動量を使うと $\dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}$, $\dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = -\vec{F}$.　(5) したがって，$\dfrac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{dt} = 0$, より $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 =$ 一定である．

問 9.4　エネルギー保存則より，$mg\ell = \dfrac{1}{2}mv^2$, 故に $v = \sqrt{2g\ell}$.　(2) エネルギー保存則より，$\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mv'^2 + \dfrac{1}{2}MV'^2 \ \ldots(*)$, 運動量保存則より，$mv = mv' + MV' \ \ldots(**)$.
(3) $(*)$ より $v' = \dfrac{mv - MV'}{m}$, これを $(**)$ に代入すると，$mv^2 = m\dfrac{(mv-MV')^2}{m^2} + MV'^2$,
故に $-2MV' + \dfrac{M^2V'^2}{m} + MV'^2 = 0$, したがって，$V' = \dfrac{2m}{m+M}v$ を得る．

問 9.5　(1) $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$ より $v = \sqrt{2gh}$.　(2) 運動量保存則 $mv = (m+M)V$ より，
$V = \dfrac{m}{m+M}v = \dfrac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$.(エネルギー保存則は成立しない．)
(3) $\dfrac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh'$ より $h' = \dfrac{V^2}{2g} = \dfrac{m^2}{(m+M)^2}h$.

問 9.6　角運動量はベクトル量でベクトル積 $\vec{r}\times m\vec{v}$ で与えられる．その大きさ $|\vec{r}\times m\vec{v}| = |\vec{r}|mv\sin\phi$, 然るに $|\vec{r}|\sin\phi = a$ であるから角運動量 $= amv$ である．

問 9.7　(1) エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mv'^2 + \dfrac{1}{2}MV'^2 \ldots(*)$, 運動量保存より $mv = mv' + MV' \ldots(**)$
エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mv'^2 + \dfrac{1}{2}MV'^2 \ldots(**)$.
$(*)$ より $m(v-v') = MV'$,
$(**)$ より $m(v-v')(v+v') = MV'^2$, 故に $v + v' = V'$.
この式を $(*)$ に代入して，$mv = mv' + M(v+v')$,
$\therefore v' = \dfrac{m-M}{M+m}v$, したがって，$V' = v + v' = \dfrac{2m}{M+m}v$.



AB の重心の速度 $V_G = \dfrac{1}{2}V' = \dfrac{m}{M+m}v$. 重心の周りの回転角速度を ω とすると，$\dfrac{\ell}{2}\omega = V_G$ である．したがって $\omega = \dfrac{2}{\ell}V_G = \dfrac{2mv}{\ell(M+m)}$ の角速度で回転する．

問 10.1　$F\Delta t = \Delta p$(運動量の変化) より，$F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{0.14\text{kg}\times 80\text{m/s}}{5.0\times 10^{-4}\text{s}} = 2.2\times 10^4\,\text{N}$.

問 10.2　力積 $= M(v_f - v_i) = 1500\text{kg}\times(10.0+60.0)\times 10^3/3600\text{m/s} = 2.92\times 10^4\text{kg m/s}$.
$\therefore F = \dfrac{2.917\times 10^4}{0.15} = 1.94\times 10^5\text{N}$

問 10.3　ボールの質量を m, 床との衝突直前におけるボールの速度を下向きに v とすると，エネルギー保存則から $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$. $\therefore v = \sqrt{2gh}$. 衝突後の速度を上向きに v' とすると，$mgh' =$

$\frac{1}{2}mv'^2$. $\therefore\ v' = \sqrt{2gh'}$. 衝突時間を Δt とすると, 衝突時にボールが受けた力 $F = \frac{m(v'-v)}{\Delta t} = \frac{m(\sqrt{2gh'}+\sqrt{2gh})}{\Delta t} = \frac{0.1\times(\sqrt{1.5}+\sqrt{2.0})\times\sqrt{2\times 9.8}}{0.01} \simeq 117 \simeq 1.2\times 10^2\,\mathrm{N}$

問 10.4　重力加速度を g とし，打ち上げ角を θ，初速度の大きさを v_0 とすると，時刻 t における位置は水平方向に $x = v_0\cos\theta\ t$, 高さ方向には $y = v_0\sin\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2$ である．この 2 式から t を消去して次の軌跡の式が得られる．

$$y = \frac{x}{\cos\theta}\left(\sin\theta - \frac{gx}{2v_0^2\cos\theta}\right)$$

$y = 0,\ \theta = 45\,^\circ$とおくと，ボールの到達距離 x から初速度 $v_0 = \sqrt{gx}$ が得られる．衝突時間 Δt はボールの半径 r を進む間とみていいので $\Delta t = r/v_0$. 衝突時においてボールに作用した力 F は運動量変化 $mv_0 - 0$ を Δt で割った値であるので，$F = \frac{mv_0^2}{r} = \frac{mgx}{r} = \frac{0.05\times 9.8\times 200}{0.02} = 4.9\times 10^3\mathrm{N}$

問 10.5　問 9-7 において A と B を異なった質量とした場合に対応する．棒の端 A の速さが 0 であるので A を持てば衝撃を感じない．

問 10.6　トラックの運動エネルギーがすべてブレーキによって発生する熱量に変わる．
$\frac{1}{2}10\times 10^3\times 20^2 = 2.0\times 10^6\mathrm{J}$.

問 10.7　$mg = 2T\sin\theta = 2T\frac{\Delta z}{\ell/2}$ より，$T = \frac{mg\ell}{4\Delta z} = \frac{1\times 9.8\times 5}{4\times 0.2} = 61.3\mathrm{N}$.

問 10.8　左端を固定した場合と同等なので 2ℓ だけ伸びる．

問 10.9　(1) 抗力 $Mg\cos\theta$ である. (2) 斜面に対して平行にはたらく力で $Mg\sin\theta$ である.

問 10.10　(1) P が動き始める直前では P と水平面の間の静止摩擦力 μmg とおもりによる張力 Mg が釣り合うので，動き始めるためには $Mg > \mu mg$.
(2) P の位置を x とすると，P の運動方程式は $m\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - \mu' mg - M\frac{d^2x}{dt^2}$ であるから
$v = \frac{dx}{dt} = \frac{M-\mu' m}{M+m}gt,\ x = \frac{1}{2}\frac{M-\mu' m}{M+m}gt^2$.
(3) $\Delta E = Mgx - \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}Mv^2 = Mg\frac{1}{2}\frac{M-\mu' m}{M+m}gt^2 - \frac{1}{2}(M+m)\frac{(M-\mu' m)^2}{(M+m)^2}g^2t^2$
$= g\frac{1}{2}\frac{M-\mu' m}{M+m}gt^2(M - M + \mu' m) = \mu' mgx$

問 10.11　質量 m 雨滴の運動方程式は $m\frac{d^2z}{dt^2} = g - c\frac{dz}{dt}$ である．$v = \frac{dz}{dt}$ とおくと，$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$, 即ち $dt = \frac{m}{mg-cv}dv$. これを積分して $\int_0^t dt = \int_0^v \frac{m}{mg-cv}dv = -\frac{m}{c}\ln(mg-cv)$，したがって $v = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$, $t\to\infty$ では，$v = \frac{mg}{c}$.

問 10.12　一定の速さであるので加速度は０．即ち $F - Mg = 0$ である．$F = Mg$ が成り立つ．

問 10.13　(1) $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{r}\,'$. (2) $m\dfrac{d^2r}{dt^2}=m\dfrac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}+m\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}=\vec{F}$. より，$m\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}=\vec{F}-m\dfrac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}$.

問 10.14　(1) 運動方程式は $m\dfrac{d^2x'}{dt^2}=-m\alpha,\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2}=-mg$.
(2) 初期条件 $t=0,\ \dfrac{dx'}{dt}=0,\ \dfrac{dy'}{dt}=0,\ x'=0,\ y'=h$ で運動方程式を解くと, $x'=-\dfrac{1}{2}\alpha t^2$, $y'=h-\dfrac{1}{2}gt^2$. 床に落下するまでの時間 t_1 は $y'=0$ より，$t_1=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. (3) $x'=-\dfrac{1}{2}\alpha t_1^2=-\dfrac{\alpha h}{g}$.

問 10.15　箱が斜面に平行に加速度 $g\sin\theta$ に運動するから, 箱の中では振り子には見かけの力が後方に $mg\sin\theta$，これが振り子にはたらく力の水平成分 $mg\sin(\theta+\phi)$ と釣り合っているので $\phi=0$ である.

問 10.16　(1) $z=z'+z_0$. (2) $z_0=z_a+A\sin(\omega t+\phi)$.　(3) $M\dfrac{d^2z}{dt^2}=F$ とするとき，(1) より $M\dfrac{d^2z'}{dt^2}=F-M\dfrac{d^2z_0}{dt^2}$. したがって (2) より，見かけの力 $-M\dfrac{d^2z_0}{dt^2}=MA\omega^2\sin(\omega t+\phi)$. (4) 台が P に及ぼす抗力を N とすると，P にはたらく力は $N-Mg$. O' 系では P は静止しているので $M\dfrac{d^2z'}{dt^2}=F-M\dfrac{d^2z_0}{dt^2}=0, \therefore N-Mg-MA\omega^2\sin(\omega t+\phi)=0$ より，$N=Mg-MA\omega^2\sin(\omega t+\phi)$. $N\geq$ の場合，P は台から離れないので，$Mg\geq MA\omega^2\sin(\omega t+\phi)$. t の如何に関わらず不等号が成り立つためには $\omega\leq\sqrt{\dfrac{g}{A}}$.

問 10.17　人工衛星の速さを v, 質量を m, 地球の半径を $R(=6.4\times10^6\mathrm{m})$, 質量を M, 万有引力定数を G とすると, $G\dfrac{mM}{(R+h)^2}=m\dfrac{v^2}{R+h}$ が成り立つ[4]．然るに静止衛星は 1 日 ($T=3600\times24=8.64\times10^4\mathrm{s}$) で一周するので $vT=2\pi(R+h)$. 重力加速度 $g=\dfrac{GM}{R^2}(=9.8\mathrm{m/s})$ であるので, $(R+h)^3=\dfrac{gR^2T^2}{4\pi^2}=\dfrac{9.8\times(6.4\times10^6)^2\times(8.64\times10^4)^2}{4\times3.1415^2}=75.9\times10^{21}$. したがって
$h=(75.9\times10^{21})^{1/3}-6.4\times10^6=3.6\times10^7\mathrm{m}$.

[4]万有引力と遠心力が釣り合っている.