物　理　学

– 講義ノート –

目 次

1 物体の運動

物理学の研究対象は無生物の世界である．犬は自らの意思で走ったり跳ねたりするが以下に対象とするものは外的な要因で動いたりするが通常は静止している物体である．そのような物体の位置を表すには，平面上では「東に 10m 行ったところで南に曲がり 5m のところ」などのように，ある基準点 O から互いに直交する 2 方向に対する数値 x と y の組 (x, y) によって位置 P が与えられる．空間での位置は高さ方向の z を加え (x, y, z) で与える．$x > 0$ の場合には「東の方向に x」であるとすると $x < 0$ では「西の方向に $|x|$」である．したがって 3 方向を定義すれば空間の任意の位置を表すことができる．ピタゴラスの定理から OP の長さ $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である．

1.1 運動の位置ベクトルによる表現

(x, y) や (x, y, z) のように複数の「数値の組」を**座標表現**という．座標間の演算には次のような関係がある．

$$a\,(x, y, z) = (a\,x, a\,y, a\,z), \tag{1.1}$$

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u,\ y + v,\ z + w). \tag{1.2}$$

座標 (x, y, z) を 3 つの座標 $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ を使ってあらわしてみよう．任意の位置 P を $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，その大きさを $r = \overline{\mathrm{OP}}$ とすると

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{1.3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.4}$$

である．一般に $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ や $\boldsymbol{r}$ のように太文字で表された，方向を含む量を**ベクトル**という．それに対して，方向を含まない量を通常の文字で表し**スカラー**という．$\boldsymbol{r}$ のように位置を表すベクトルを特に**位置ベクトル**という．互いに角度 θ をなす 2 つベクトル $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ の間の積を次のように定義しよう．

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = A\,B\,\cos\theta. \tag{1.5}$$

ただし，A, B はそれぞれ $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ の大きさである．このような積を**スカラー積**とか**内積**という．$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ の場合，$\theta = 0$ であるから

$$A = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}}\,, \tag{1.6}$$

である．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は互いに直交しているので

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1,\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{1.7}$$

したがって $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$，$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とすると次式が得られる．

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\ , \tag{1.8}$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\ . \tag{1.9}$$

さて，物体の運動を考えてみよう．物体の位置を空間の一点で代表させることによって問題を簡単化する．物体が時刻 t において，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ にいたとする．δt 後には $\boldsymbol{r}(t + \delta t)$ にいるので，この間の平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$ は次式で与えられる．

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}(t + \delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\delta t} \tag{1.10}$$

したがって，t における瞬間の速度 $\boldsymbol{v}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{v}(t)=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1.11}$$

同様に加速度 $\boldsymbol{a}$ は時間に関する 2 階微分で次のように与えられる．

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\right). \tag{1.12}$$

一定の速さ v で円運動する物体の加速度を求めてみよう．物体が時刻 t において，半径 ℓ，回転角 $\phi(t)$ の円周上の位置 $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r}=\ell\cos\phi(t)\,\boldsymbol{i}+\ell\sin\phi(t)\,\boldsymbol{j}. \tag{1.13}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=-\ell\sin\phi(t)\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{i}+\ell\cos\phi(t)\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{j}. \tag{1.14}$$

速さが一定値 v であるから，角速度 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v}{\ell}$ である．したがって

$$\boldsymbol{v}=-v\sin\phi(t)\,\boldsymbol{i}+v\cos\phi(t)\,\boldsymbol{j}. \tag{1.15}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a}=-\frac{v^2}{\ell}\cos\phi(t)\,\boldsymbol{i}-\frac{v^2}{\ell}\sin\phi(t)\,\boldsymbol{j}. \tag{1.16}$$

上の加速度は (1.13) 式で表わされる $\boldsymbol{r}$ とは逆方向のベクトルで中心に向かうことがわかる．すなわち

$$\boldsymbol{a}=-\frac{v^2}{\ell^2}\,\boldsymbol{r}. \tag{1.17}$$

$\boldsymbol{a}$ の大きさは $\dfrac{v^2}{\ell}$ である．角速度を用いると $\ell\omega^2$ である．

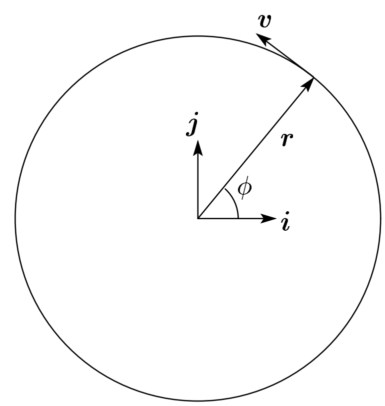

図 1: 円運動のベクトル表現

1.2 空間と時間に関する単位

日常生活においてよく使われる単位は，例えば車の速さでは毎時 80km（80[km/h]）のように距離を [km]，時間を [h] などであらわす．ところが物理学では非常に小さい原子や素粒子などや星までの距離のように非常に大きい範囲をも取り扱うのでその都度長さや時間の単位を便宜上変えたりする．しかし，標準的には長さはメートルの [m]，時間は秒の [s] を使用する．したがって各種単位と [m],[s] の間の関係に慣れておく必要がある．特に時間は「時」以下は 60 進法であるから注意する必要がある.「原子の大きさは約 1Å オングストロームである」などと云われる．最近はナノメートル (nm) が使われるようになった．また,「我が銀河系の直径は 10 万光年である」などのように距離を「光年」で表す場合もある．理科年表[1]から空間と時間の単位に関する事項を拾ってみよう．

[1]理科年表 平成 19 年度版 物 p7,8 国立天文台編 丸善 kk

$\boxed{\text{長さ}}$ フェルミ：1 fm=10^{-15} m，オングストローム：1 Å=0.1 nm=10^{-10}m，ミクロンメートル：1 μ m=10^{-6} m，天文単位 (astronomical unit)[2]：1 AU=1.496×10^{11}m，光年：1 光年=9.46×10^{15} m．パーセク (parsec)：1 pc=3.0857×10^{16} m=1 天文単位の距離を見込む角が 1 秒となる距離

$\boxed{\text{面積}}$ バーン：1 b=10×10^{-28} m^2，アール：1 a=100 m^2，ヘクタール：1 ha=10^4 m^2．

$\boxed{\text{体積}}$ リットル：1 L=10^3 cm^3=10^{-3} m^3．

$\boxed{\text{時間}}$ 分 (minute)：1 min=60 s，時 (hour)：1 h=60 min=3600 s，日 (day)：1 d=24 h=86400 s

$\boxed{\text{速度}}$ ノット:1 knot=1 海里/時=1.852 km/h=0.5144 m/s，真空中の光速:c=2.99792458×10^8m/s

$\boxed{\text{加速度}}$ ガル：1 Gal=1 cm/s^2=10^{-2}m/s^2

無次元単位ではあるけれども$\boxed{\text{角度}}$を表わすものがある．
ラジアン (radian, rad)：円の周上で，その半径の長さに等しい長さの孤を切り取る 2 本の半径の間に含まれる平面角，度 (degree)：1 °=$\dfrac{\pi}{180}$ rad ($\pi = 3.141593$)，分 (minute)：$1' = \dfrac{1}{60}$ °=$\dfrac{\pi}{10800}$ rad，秒 (second)：$1'' = \dfrac{1}{60}$ 分=$\dfrac{\pi}{648000}$ rad． ステラジアン (steradian, sr)：球の中心を頂点とし，その球の半径を 1 辺とする正方形に等しい面積を球の表面上で切り取る立体角．1 rad および 1 sr の定

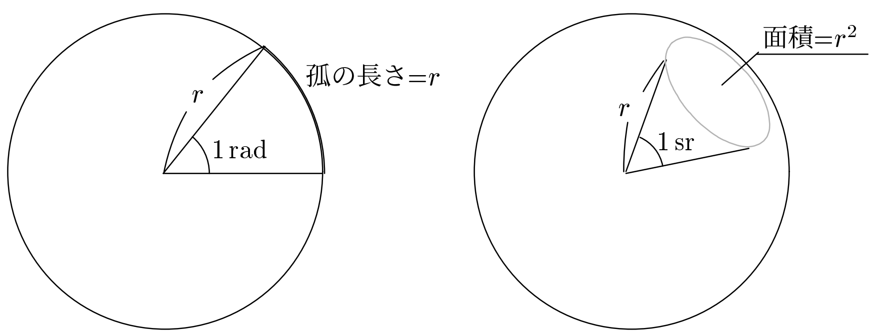

図 2: 平面角 1 rad および 立体角 1 sr の定義

義を図 2 に示している．天文の分野でよく使用される pc (パーセク) を確かめてみよう．「1 pc は天文単位の距離を見込む角が 1 秒となる距離である」から rd の定義から 1 pc =$1.496\times10^{11} \times \dfrac{648000}{\pi}$ m =3.0857×10^{16} m が得られる．

km や cm のように m の前にアルファベットを 1 文字付け加えることによって 1 m の 1000 倍や 1/100 を表す場合がある．よく使われる文字と 10 の整数乗倍を表 1 に示す[3]．

表 1: 10 の整数乗倍を表す接頭語

名称	ペタ	テラ	ギガ	メガ	キロ	センチ	ミリ	マイクロ	ナノ	ピコ	フェムト
文字	P	T	G	M	k	c	m	μ	n	p	f
大きさ	10^{15}	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}

[2] 1AU=地球の公転軌道の平均距離（長半径）
[3] 理科年表 平成 19 年度版 物 p.5 国立天文台編 丸善 kk

2　質点に働く力と運動

物体は大きさを持つがその大きさを無視できるほど小さいか，あるいはそれ自身の回転運動を無視しても良い場合にその物体を**質点**と称する．

2.1　慣性の法則

物体 (質点) が運動するには最初何らかの「作用」が必要である．運動の状態は「速度」で表される．すなわち,「速度が変化する」とは「運動の状態が変化する」ことである．前節で論じたようにこの変化量は加速度 $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ で表される．$\boldsymbol{a} = 0$ すなわち運動状態が変わらないとは数学的には $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} =$ 一定，であることを意味する．そして質点の運動状態が変化する場合，すなわち $\boldsymbol{a} \neq 0$ においては質点に何らかの「作用」が加えられているはずである．ニュートンは，物体の運動状態が変化させる原因になる「作用」としてベクトル量「**力**」$\boldsymbol{F}$ を導入した．そして，この力の加速度への影響の度合いを表す量 (スカラー) として「質量 m」を導入した．すなわち

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}. \tag{2.1}$$

(2.1) 式は「同じ力に対して加速度と質量とは反比例する」ことを意味する．すなわち質量が大きい物体ほど加速度が小さい，すなわち運動状態を変えにくい.「運動状態を変えにくい性質」を「慣性」という．したがって質量とはを慣性の度合いを表す量である．この節の初めに定義した「質点」は「質量を持つが大きさを持たないもの」という事ができる．ニュートンが発見したこの法則を「**慣性の法則**」といい力学の根本法則である．4 ℃の水 $1\,\mathrm{cm}^3$ の水の質量を $1\,\mathrm{g}$(グラム) と定義する．そして，通常その 1000 倍の $1\,\mathrm{kg}$ を質量の単位として使用する．長さの単位 m，時間の単位 s を加えてこれらの単位を **MKS 単位**という．そして，$1\,\mathrm{kg}$ の物体に加速度 $1\,\mathrm{m/s^2}$ を生じさせる力の単位を 1 ニュートンと称し記号 N を使う．$1\,\mathrm{N}=1\,\mathrm{kg\cdot m/s^2}$ である．

半径 ℓ，速さ v で等速円運動している質量 m の物体に働いている力 $\boldsymbol{F}$ は (1.17) 式より次式で与えられる．

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m\,v^2}{\ell}\,\boldsymbol{e}_r = -m\,\ell\,\omega^2\,\boldsymbol{e}_r. \tag{2.2}$$

ここに $\boldsymbol{e}_r$ は円の中心から物体の方向に向かう単位ベクトルである．(2.2) 式によって表される円の中心に向かう力を**向心力**という．$\boldsymbol{F}$ の大きさ $F = m\,\ell\,\omega^2$ である．たとえば，月が地球を中心に円運動[4]をしているとして月が地球から受ける向心力を求めてみよう．

$\ell = 3.844 \times 10^8\,\mathrm{m}$，$m = 0.0123\times$ 地球の質量[5]$=7.348\times10^{22}\,\mathrm{kg}$，周期 $T = 27.3\,\mathrm{day}$，角速度 $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(27.3\times86400\,\mathrm{s}) = 2.66\times10^{-6}\,1/\mathrm{s}$．これらの値から $F = 2.00\times10^{20}\,\mathrm{N}$ が得られる．

運動途中で物体の質量が変化する場合にも適応できるように (2.1) 式を変形しよう．速度 $\boldsymbol{v}$ と質量 m の積 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ を「**運動量**」という．m を微分の中に入れ

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}, \tag{2.3}$$

とする．$\boldsymbol{F} = 0$ では $\boldsymbol{p} =$ 一定である．すなわち「力が働かない時には運動量は変化しない」と表現したほうがより一般的である．

[4]月の軌道は離心率 0.055 の楕円であるがほぼ円と見なせる．
[5]地球の質量$=5.974\times10^{24}\,\mathrm{kg}$.

2.2　落体の運動

物体を手に持って静かに離すと落下する．これは物体に**重力**が働いているからである．重力は物体の質量に比例する．この比例定数を g とし，上向きに z 軸をとると次の微分方程式が得られる．

$$-mg = m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.4}$$

最初の速度は 0 であるから

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -gt. \tag{2.5}$$

また，最初高さ h の位置にあったとすると

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h. \tag{2.6}$$

落下の加速度 g は**重力加速度**として知られ，約 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である．$z=0$ と置いて，地面に落ちるまでに要した時間 $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ が得られる．高さ $20\,\mathrm{m}$ のビルディングの屋上から落とした物体は空気の影響などがなければ約 2 秒で地上にとどく．これは，ピサの斜塔から同時に落とした 2 つの物体はその質量の大小に拘わらず同時に落ちるというガリレオの伝説の実験に通じる．

2.3　放物運動

物体を斜め上方に放り投げると上空を運動しやがて斜め下方に落下する．この現象は空間内に互い直交する 3 つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を定義し, 高さ方向に $\boldsymbol{k}$ をとると正確に扱うことが出来る．

物体の位置 $\boldsymbol{r}$ および働く力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{F} = -mg\,\boldsymbol{k},$$

運動方程式は次式で与えられる．

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{2.7}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{2.8}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -mg. \tag{2.9}$$

図 3 に示すように，最初水平面にある $\boldsymbol{i}$ 方向から測って角度 θ 方向に速さ v で投げ上げたとする．すなわち，時刻 $t=0$ における位置と速度をそれぞれ $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_0 = (v\,\cos\theta,\, 0\,, v\,\sin\theta)$ とすると次式を得る．

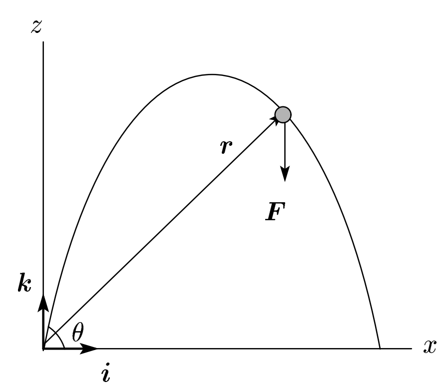

図 3: 放物運動

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\,\cos\theta, \tag{2.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v\,\sin\theta - gt. \tag{2.12}$$

さらに

$$
\begin{aligned}
x &= v\,\cos\theta\,t, && (2.13)\\
y &= 0, && (2.14)\\
z &= v\,\sin\theta\,t - \frac{1}{2}gt^2. && (2.15)
\end{aligned}
$$

(2.13),(2.15) より t を消去すると次のように放物線を表す式が得られる．

$$z = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,x - \frac{g}{2\,v^2\cos^2\theta}\,x^2 = -\frac{g}{2\,v^2\cos^2\theta}\left(x - \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{v^2\sin^2\theta}{2g} \qquad (2.16)$$

$x = \dfrac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$ のとき, 高さの最大値 $z = \dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ である．地上に落下する間での時間は (2.15) の左辺を 0 と置いて $t = \dfrac{2\,v\,\sin\theta}{g}$, したがって，到達距離 L は (2.13) より

$$L = \frac{2\,v^2\sin\theta\,\cos\theta}{g} = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g} \qquad (2.17)$$

である．投げる角度を変えたとき L の最大になる θ の値は (2.17) を θ について微分し 0 と置けば得られる．$\cos(2\theta) = 0$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4} = 45\ ^\circ$である．

2.4 バネによる振動

物体に働く力の例としてバネを取り上げよう．物体にバネをつなぎ水平に置く．バネの伸びに対してはバネが縮む方向に力が働く．その力 F はバネの伸びた長さ x に比例する．その比例定数 k を**バネ定数**という．すなわち

$$F = -k\,x \qquad (2.18)$$

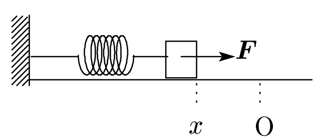

図 4: バネによる力

$x = 0$ で力の働いていないときのバネの長さを**自然の長さ**という．図 4 は $x < 0$ でバネが縮んだ状態を示している．この物体の質量を m とすると運動方程式は次式で与えられる．

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x. \qquad (2.19)$$

$x = A\cos(\omega\,t + \delta)$ と置き，(2.19) 式に代入すると $\omega = \sqrt{k/m}$ が得られる．初期条件 $t = 0$ のとき，$x = a$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ とすると，$A = a$, ,$\delta = 0$ が得られ，次の振動の式を得る．

$$x = a\,\cos\omega\,t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (2.20)$$

このように運動を繰り返す振動を**単振動**という．ω を**角振動数**という．$T = 2\pi/\omega$ を**周期**，$\nu = 1/T$ を**振動数**という．

2.5　力学的エネルギーの保存

「落体の運動」における (2.4) 式の両辺に z 方向の速度 $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を乗じると次式を得る．

$$-mg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{2.21}$$

上式から次式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\,v_z^2 + mgz\right) = 0. \tag{2.22}$$

したがって

$$\frac{1}{2}m\,v_z^2 + mgz = \text{一定}. \tag{2.23}$$

すなわち，落体運動中，(2.23) 式の左辺の量が変化しない事を意味する．ここで次の 2 つのスカラー量を定義しよう．(2.23) 式，左辺の最初の項 $T = \dfrac{1}{2}m\,v_z^2$ を**運動エネルギー**，次の項 $U = mgz$ を**位置のエネルギー**あるいは**ポテンシャルエネルギー**とし，この総和を**力学的エネルギー**という．したがって，落体運動中，力学的エネルギーは保存される．一般に物体を力 $\boldsymbol{F}$ で $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 移動するときに力のする**仕事**は $\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ で定義されるので，ポテンシャルエネルギーの変化量は

$$\mathrm{d}U = -\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{2.24}$$

である.「バネによる振動」の場合にも同様な考察をしてみよう．(2.19) 式において $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とすると

$$\begin{aligned} -k\,x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= mv_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}k\,x^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\,v_x^2\right). \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{2}m\,v_x^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = \text{一定}. \tag{2.25}$$

この場合にはポテンシャルエネルギーは $U = \dfrac{1}{2}k\,x^2$ である．

ここで，(2.24) 式を考察してみよう．$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の成分で表すと

$$\mathrm{d}U = -(F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z). \tag{2.26}$$

函数 U が (x, y, z) において連続であるならば $\boldsymbol{F}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\right). \tag{2.27}$$

2.6　万有引力の法則

惑星の運動が太陽から受ける引力によるものであることを明らかにしたのはニュートンである．彼は質量 m の物体 A が距離 r 隔たった質量 M の物体 B から受ける力 $\boldsymbol{F}$ は，r の 2 乗に反比例し，$M\,m$ に比例する，すなわち

$$\boldsymbol{F} = -G\,\frac{M\,m}{r^2}\,\boldsymbol{e}, \tag{2.28}$$

とした．(2.28) はあらゆる物体について成立するので**万有引力の法則**という．比例定数 G は**万有引力定数**と呼ばれる．$\boldsymbol{e}$ は B から A に向かう単位ベクトルである．B を原点にとり，A の位置を $\boldsymbol{r}$ とすると

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k} \tag{2.29}$$

であるからポテンシャルエネルギー U は次式で与えられる．

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \tag{2.30}$$

U は r のみの関数であることと $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ より

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{x}{r},\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{y}{r},\ \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{z}{r},$$

が得られ (2.30) より (2.28) 式が確かめることができる．したがって，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + U(r) = E = \text{一定}, \tag{2.31}$$

が得られる．地球の半径は約 400 km，質量は約 $6.0{\times}10^{24}$ kg である．地表での物体の加速度 g は約 $9.8\mathrm{m/s^2}$ であるから

$$9.8\,\mathrm{m/s^2} = G\,\frac{6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{6.4^2\times10^{12}\,\mathrm{m^2}}\,,$$

したがって $G = 6.7\times10^{-11}\mathrm{m^3/(kg{\cdot}s^2)}$ が得られる[6]．

2.7　中心力と角運動量保存

質量 m の質点が原点 O の周りに半径 r，速さ v の円運動をするとき，r と運動量 mv の積を**角運動量**という．回転の向きを区別するために位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量 $\boldsymbol{p}$ との積を $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}$ とし，ベクトル $\boldsymbol{L}$ の角運動量を導入する．

一般のベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を図 5 に示している．$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の大きさは斜線で示すように $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ によってできる平行四辺形の面積である．また，その向きは $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ にねじる時に右ネジが進む方向である．$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の間の角度を θ とすると $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の大きさは $A\,B\cos\theta$ である．$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ であるので，互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の間には

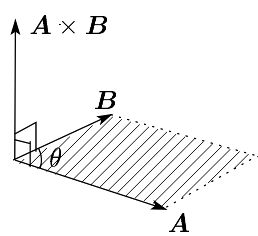

図 5: ベクトル積

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} &= 0,\\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} &= \boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} &= -\boldsymbol{j},
\end{aligned}$$

が成立する．したがって，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の成分 $A_x, B_x, \ldots,$ 等で表わすと

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{2.32}$$

[6]正確には $G = 6.672\times10^{-11}\mathrm{m^3/(kg{\cdot}s^2)}$ である．

さらに，変分に対して次式が成り立つ．

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \mathrm{d}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}. \tag{2.33}$$

万有引力の場合には，角運動量の時間変化は (2.28) および (2.29) より次式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = 0 \tag{2.34}$$

したがって，

$$\boldsymbol{L} = \text{一定}. \tag{2.35}$$

すなわち，角運動量が保存されることを意味する．(2.28) 式のように $\boldsymbol{r}$ の方向と一致する力を**中心力**という．中心力を受けて運動する物体は角運動量が保存されるのでその軌跡は同一平面内にある．図 6 のように $\boldsymbol{r}$ を $xy-$ 平面内にとり $\boldsymbol{r}$ の方向が x 軸と角度 ϕ をなすとすると，関係

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{2.36}$$

によって，$\boldsymbol{r}$ を r と ϕ で表すことができる．この $(r,\,\phi)$ の表現を $\boldsymbol{r}$ の極座標表示という．$\mathrm{d}x$ および $\mathrm{d}y$ を $(r,\,\phi)$ で表すと次式を得る．

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi = \cos\phi\,\mathrm{d}r - r\,\sin\phi\,\mathrm{d}\phi, \tag{2.37}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi = \sin\phi\,\mathrm{d}r + r\,\cos\phi\,\mathrm{d}\phi. \tag{2.38}$$

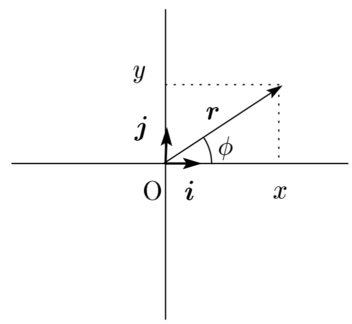

図 6: $\boldsymbol{r}$ の極座標表示

ここで，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}$，$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}$ とすると

$$\boldsymbol{p} = m\,\{\boldsymbol{i}\,(\dot{r}\cos\phi\, - r\,\dot{\phi}\sin\phi\,) + \boldsymbol{j}\,(\dot{r}\sin\phi\, + r\,\dot{\phi}\cos\phi\,)\}. \tag{2.39}$$

角運動量は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{i}\,r\cos\phi + \boldsymbol{j}\,r\sin\phi)\times m\,\{\boldsymbol{i}\,(\dot{r}\cos\phi\, - r\,\dot{\phi}\sin\phi\,) + \boldsymbol{j}\,(\dot{r}\sin\phi\, + r\,\dot{\phi}\cos\phi\,\}\ = mr^2\,\dot{\phi}\,\boldsymbol{k}. \tag{2.40}$$

2.8 惑星の楕円軌道

ここで具体的な問題に移ろう．M を太陽の質量，m を惑星の質量，$\boldsymbol{r}$ を太陽を原点にとったときの惑星の位置ベクトルとする．(2.37), (2.38) より速度の 2 乗は

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = (\dot{r}\cos\phi\, - r\,\dot{\phi}\sin\phi)^2 + (\dot{r}\sin\phi\, + r\,\dot{\phi}\cos\phi)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2\,r^2}, \tag{2.41}$$

であるから (2.31) 式より $\boldsymbol{r}$ の大きさ r の時間変化率は保存量 L, E によって次式で与えられる．

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}. \tag{2.42}$$

符号 $\pm$ は平方根の中が 0 になる r の値の前後において異符号になるように選べばよい．(2.40) 式より $\dot{\phi} = \dfrac{L}{mr^2}$ であるから極座標表示の軌道の微分方程式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \pm\frac{m\,r^2}{L}\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}. \tag{2.43}$$

(2.43) を解くために変数変換 $u = \dfrac{1}{r}$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \pm\sqrt{-u^2 + \frac{2GMm^2}{L^2}u + \frac{2Em}{L^2}}. \tag{2.44}$$

積分を行うと軌道の式を次のように得られる[7].

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\phi},\ \ell = \frac{2}{\alpha+\beta},\ e = \frac{|\alpha-\beta|}{\alpha+\beta}. \tag{2.45}$$

ここに，α, β は (2.44) 式において平方根の中を 0 と置いたときの u の 2 根である．(2.45) 式は円錐曲線の極座標表示である．e は離心率，ℓ は根と係数の関係から次式を得る．

$$\alpha+\beta = \frac{2GMm^2}{L^2},\ \alpha\beta = -\frac{2Em}{L^2},\ (\alpha-\beta)^2 = \frac{4G^2M^2m^4}{L^4} + \frac{8Em}{L^2}. \tag{2.46}$$

軌道が楕円である条件は $E < 0$ である[8]．焦点の位置に太陽があり，$\phi = 0$ において近日点で $r = \ell/(1+e)$, $\phi = \pi$ で遠日点で $r = \ell/(1-e)$ である．したがって，軌道の長半径 a とすると

$$a = \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e}\right) = \frac{1}{\alpha+\beta}\frac{2}{1-e^2} = \frac{GMm}{2|E|}, \tag{2.47}$$

である．短い方の半径は $b = a\sqrt{1-e^2}$ で与えられるので楕円の面積は $\pi\, a\, b = \pi\, a^2\sqrt{1-e^2}$ である．また，(2.40) より面積速度 $\dfrac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \dfrac{L}{2m}$ であるから周期 T は

$$T = \frac{2m\pi\, a^2\sqrt{1-e^2}}{L} = 2\pi a^2\frac{\sqrt{2|E|}}{GM\sqrt{m}}.$$

然るに (2.47) より $\dfrac{2|E|}{m} = \dfrac{GM}{a}$ であるから

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2}. \tag{2.48}$$

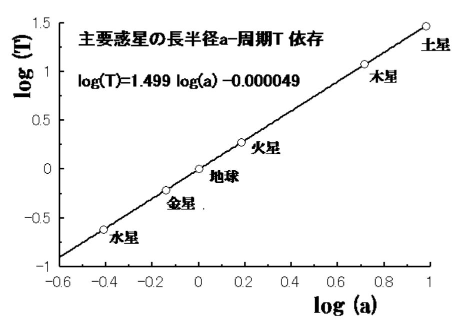

図 7: 主な惑星の a-T 依存

表 2: 主な惑星軌道の諸量

惑星	水星	金星	地球	火星	木星	土星
軌道長半径 a	0.3871	0.7233	1.0000	1.5237	5.2026	9.5549
離心率 e	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934	0.0485	0.0555
公転周期 T（year）	0.24085	0.61521	1.00004	1.88089	11.8622	29.4578

GM は惑星に独立な量であるので惑星の周期は軌道長半径のみに依存する．これが有名なケプラーの第 3 法則である．因みに地球の a の値を単位に主要惑星の長半径，離心率および周期の観測値を表 2 に示す[9]．図 7 は a に対する T を両対数グラフで描き，最小 2 乗法で関数フィットしたものである．$T \propto a^{1.5}$ であることがわかる．

[7] 数学公式集　森口繁一等 岩波全書 p.102 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)}} = \sin^{-1}\dfrac{2x-a-b}{b-a}$.

[8] $0 < e < 1$ では楕円，$e = 1$ では放物線，$e > 1$ では双曲線である．

[9] 理科年表 2007 年度版 国立天文台編 p.76-77.

3　質点系の力学

２つ以上の物体（質点）が互いに作用を及ぼしている場合について考えてみよう．惑星の運動の場合，太陽の質量が惑星のそれに比し非常に大きいので太陽の運動を無視し静止しているものとした[10]．また，他の惑星の引力も考慮の外に置いた．惑星間には万有引力が働き，分子間にはクーロンポテンシャルによる引力や斥力が働く．これら複数の物体間に働く力を考慮した問題を取り扱おう．

3.1　２体問題

位置 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ と $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$ にそれぞれ質量 m, M の質点 A, B が相互に作用を及ぼし合っている場合を考えよう．この質点系には外力が働いていないので

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = 0.\ \text{すなわち},\ m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P} = \text{一定}. \tag{3.1}$$

図 8 のように，座標の原点を

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{m\,\boldsymbol{r} + M\,\boldsymbol{R}}{m + M}$$

に選び，$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ および $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_0$ を改めて A, B の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{R}$ とすると次式を得る．

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.2}$$

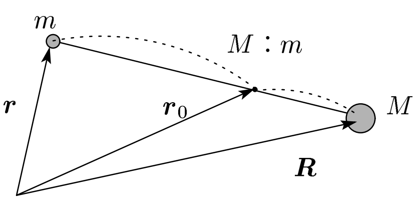

図 8: 重心

一般に位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$ に，質量 $m_1, m_2, \ldots$ がある場合，位置 $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$ をこの質点系の**重心**という．角運動量は

$$\boldsymbol{r} \times m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{R} \times M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L} = \text{一定} \tag{3.3}$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}$ とすると

$$\boldsymbol{r} = \frac{M}{m + M}\,\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{R} = -\frac{m}{m + M}\,\boldsymbol{x}, \tag{3.4}$$

であるから，(3.2) を考慮し，**換算質量** $\mu = \dfrac{m\,M}{m + M}$ を導入すると

$$\boldsymbol{x} \times m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \mu\,\boldsymbol{x} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L} \tag{3.5}$$

また，相互のポテンシャル U が A, B 間の距離 $x = |\boldsymbol{x}|$ のみの関数であるとすると，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\,M\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + U(x) = E \tag{3.6}$$

関係式 (3.2) を使うと

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\,M\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\mu\,\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{3.7}$$

[10] 惑星の中で最も重い木星でも太陽との質量比は約 $\frac{1}{1000}$ である

を示す事ができる．$\boldsymbol{x}$ を極座標 $(x,\,\phi)$ で表すと

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dot{x}^2 + x^2\dot{\phi}^2. \tag{3.8}$$

(3.5) 式より $\mu\, x^2\,\dot{\phi} = L$ を導くことができるので

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E}{\mu} - \frac{2U(x)}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2\,x^2}}. \tag{3.9}$$

上式は質量 $m,\,M$ の 2 体問題を質量 μ の 1 体問題に帰着できる事を意味する．U が万有引力ポテンシャルの場合には

$$U(x) = -\frac{GmM}{x} \tag{3.10}$$

であるから，前節の (2.45) 式と同様に $\boldsymbol{x}\,(x,\phi)$ の軌道は次式で与えられる．

$$x = \frac{\ell}{1 + e\,\cos\phi}. \tag{3.11}$$

ただし

$$\ell = \frac{L^2}{GMm\mu},\ 1 - e^2 = -\frac{2L^2E}{G^2M^2m^2\mu}. \tag{3.12}$$

長径 a は (2.47) 式と同様の次式で与えられる．

$$a = \frac{\ell}{1 - e^2} = \frac{GMm}{2|E|}. \tag{3.13}$$

$\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{R}$ の極座標表示 $\boldsymbol{r}\,(r,\phi_{\mathrm{A}}),\,\boldsymbol{R}\,(R,\phi_{\mathrm{B}})$ とすると

$$r = \frac{M}{m+M}\,x,\ \phi_{\mathrm{A}} = \phi \tag{3.14}$$

$$R = \frac{m}{m+M}\,x,\ \phi_{\mathrm{B}} = \pi + \phi \tag{3.15}$$

であるから A および B の軌道は次式で与えられる．

$$r = \frac{\ell_{\mathrm{A}}}{1 + e\,\cos\phi},\ \text{ここに},\, \ell_{\mathrm{A}} = \frac{M}{m+M}\ell, \tag{3.16}$$

$$R = \frac{\ell_{\mathrm{B}}}{1 - e\,\cos\phi},\ \text{ここに},\, \ell_{\mathrm{B}} = \frac{m}{m+M}\ell. \tag{3.17}$$

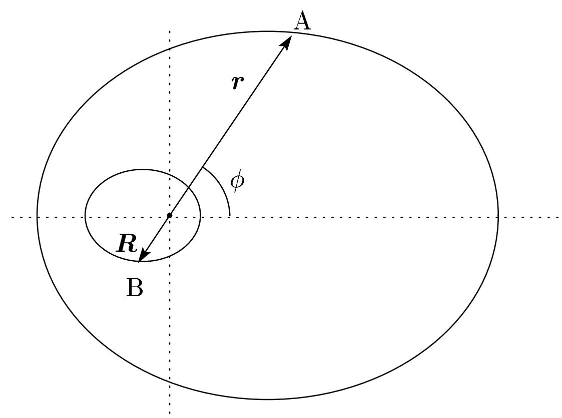

図 9: 2 体の楕円軌道

軌道が楕円である場合には図 9 に示されているように A および B は共に同じ離心率 e で軌道の大きさは $M:m$ である．太陽の動きは木星の軌道の 1/1000 も小さく，太陽の移動範囲は木星の楕円軌道の面積の 10^{-6} である．