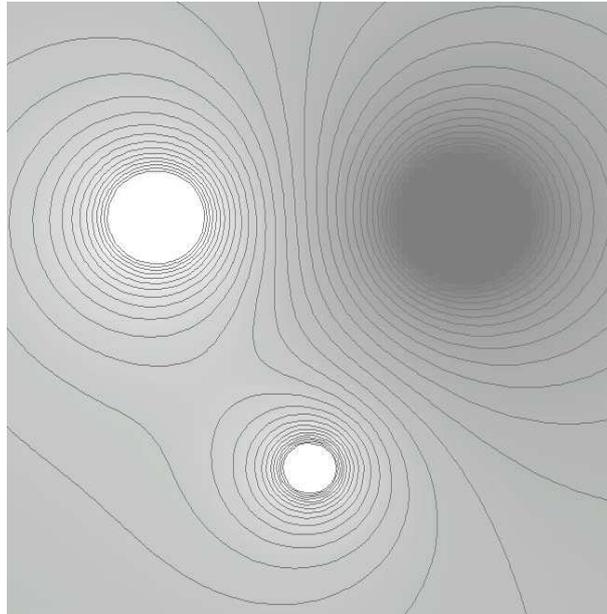


# 物理学 II

— 講義ノート —

2006年12月

近畿大学工学部 南 宣行



# 1 クーロンの法則

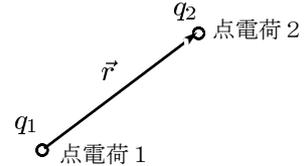
**帯電:** 電子が他のところに移動した状態。

**電荷  $q$ [C](クーロン):** 電子 1 個は「負」の電荷でその「大きさ」は  $e=1.602 \times 10^{-19}$  C である。

2 つ「小物体」がそれぞれ電荷  $q_1$  と電荷  $q_2$  に帯電<sup>1</sup>、距離  $r$  離れている場合、これらの物体に、はたらく力の大きさ  $F$  は次式で与えられる。

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

ここで、 $k$  は比例定数である。力の方向は 2 つの電荷が同符号ならば反発する方向に、異符号ならば小物体同士引っ張り合う。これらを考慮してこの法則を図 1 で定義されるベクトル  $\vec{r}$  で表現すると点電荷 2 に、はたらく力  $\vec{F}$  は次式で与えられる。



$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^3} \quad (1.2)$$

図 1: 点電荷間のベクトル

$\vec{r}/r$  は  $\vec{r}$  方向の単位ベクトルである。(1.2) 式が「クーロン (Coulomb) の法則」である。天体間の場合には同様な「万有引力の法則」がある<sup>2</sup>。

**誘電率:** 点電荷の周りの「力の場」はその環境によって異なる。真空中に置かれた場合と雲母のような物質とでは大きく違う。この違いを表すのが「誘電率」 $\epsilon (= 1/(4\pi k))$  である。特に真空の場合  $k_0 = 8.988 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ 、誘電率は  $\epsilon_0 = 1/(4\pi k_0) = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$  である<sup>3</sup>。

**問 1.1** 同一の電荷  $q$  を持つ小物体が互いに  $r$  離れている場合に小物体に働く力  $F_1$  と同一の電荷  $q/2$  を持つ小物体が互いに  $2r$  離れている場合に小物体に働く力  $F_2$  を比較せよ。

**問 1.2** 真空中に、同一の電荷  $Q$  を持つ小物体 2 個が互いに 1.0cm 離れている場合に小物体に働く力が 1.0N である。電荷  $Q$  を求めよ。

**問 1.3**  $xy$ -座標の表現で  $(-r, 0)$  の点に電荷  $-q$  が  $(r, 0)$  の点に電荷  $q$  がある場合、 $(0, r)$  の点にある電荷  $-q$  をもつ小物体にはたらく力  $\vec{F}$  の  $x$  成分  $F_x$ 、 $y$  成分  $F_y$  および  $|\vec{F}|$  を求めよ。

# 2 電場とガウスの法則

空間に置かれた電荷によって、これらの周りでの力の場を考察する。3次元の直交座標で表した位置  $(x, y, z)$  に点電荷  $q$  がある時、この電荷が受ける力  $\vec{F}$  は  $x, y, z$  によって変わる。また、 $q$  に比例する。したがってこのような力の場 (ベクトルの場) は次式で与えられる。

$$\vec{F} = q \vec{E}(x, y, z) \quad (2.1)$$

上式のベクトルで表される物理量  $\vec{E}$  を電場という。 $\vec{E}$  の単位は  $[\text{N}/\text{C}]$  である。

**問 2.1** 問 1.3 において座標  $(0, r)$  における電場  $\vec{E}$  の  $x$  成分  $E_x$ 、 $y$  成分  $E_y$  および  $|\vec{E}|$  を求めよ。

**問 2.2** 直線上に線密度  $\lambda$  の電荷が一様に帯電している場合、直線から距離  $a$  での電場を求めよ。

<sup>1</sup>小物体に帯電している電荷のことを点電荷という。

<sup>2</sup>(1.1) 式における  $k$  は万有引力定数  $G$ 、 $q_1, q_2$  は 2 天体の質量  $m_1, m_2$  に対応する。

<sup>3</sup>雲母の誘電率は約  $7\epsilon_0$  である。

電場は「水の流れ」に喩えることができる。プラスの電荷は噴水、マイナスの電荷は水の吸い込み口とみなすことができる。水の流れを線で描くと電場をイメージすることができる。2個の電荷  $Q$  および  $-Q$  が分布している場合、電場の方向に沿って線を描くと図2のような点線になり、あたかも水が点線に沿って流れ、吸い込み口に入るように見える。この点線を電気力線という。一定の速さで流れ出る噴水の水を周りを囲って集めると噴水の近くで集めても遠くで集めても同じ水量が得られる。この類似から電場  $\vec{E}(\vec{r})$  について次のような法則が得られる。

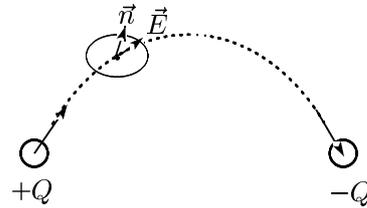


図 2: 電気力線

$$\int \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \text{一定} \quad (2.2)$$

ただし、2重の積分は電荷を含む周りの或閉曲面について行われる。 $\vec{n}$ はその曲面に垂直な単位ベクトルである<sup>4</sup>。真空中に置かれた、ただ1つの点電荷  $Q$  の場合を考えてみよう。点電荷の位置を原点に半径  $r$  の球面上では、 $\vec{E}$  は同じで  $r$  の関数であることと、(2.2) 式に現れる  $\vec{n}$  は  $\vec{E}$  と同じ方向であるから次の結果を得る。

$$\int \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = k_0 \frac{Q}{r^2} \int \int_{\text{球面}} dS = 4\pi k_0 Q = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.3)$$

閉曲面が球でない一般の曲面においても上式は成立する。また、閉曲面内に複数の電荷  $Q_1, Q_2, \dots$  ある場合にも成り立ち、次式で表される。

$$\int \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\sum_j Q_j}{\epsilon_0}. \quad (2.4)$$

(2.4) をガウスの法則という。

**帯電した平板の周囲の電場** 無限に広がった平板に電荷面密度  $\sigma[\text{C}/\text{m}^2]$  で電荷が一様に分布している場合、平面の両側における電場を求めてみよう。

図3のように平面に垂直で底面の面積が  $S$  の円筒の表面上においてガウスの法則を適用する。円筒内にはある電荷量  $Q$  は  $\sigma S$  である。面が無限に広がっているため、対称性から電場の方向はあらゆる場所で面に垂直である。したがって円筒の上の面では  $\vec{E} \cdot \vec{n} = ES$ 、下の面では  $\vec{E} \cdot \vec{n} = E'S$ 、側面では電場は面に平行であるから  $\vec{E}'' \cdot \vec{n} = 0$  である。上下対称とみなせるので  $E' = E$ 。したがって

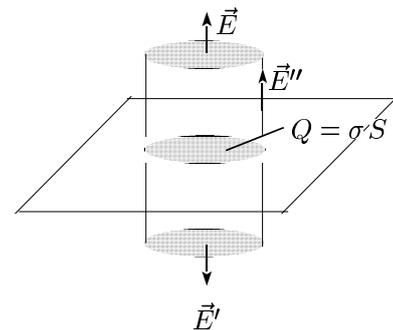


図 3: 帯電板の周りの電場

$$\int \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.5)$$

問 2.3 問 2.2 をガウスの法則を使って解け。

問 2.4 2枚の非常に広い平板を平行に置きそれぞれ電荷面密度  $-\sigma, \sigma$  の電荷が一様に分布すると、平板間の電場が  $E = \sigma/\epsilon_0$  であることをガウスの法則を使って示せ。

<sup>4</sup> $\vec{E} \cdot \vec{n}$  は  $\vec{E}$  と  $\vec{n}$  のスカラー積である。

### 3 ポテンシャル

**復習** 質量  $m$  の物体にはたらく重力は下向きに  $mg$  ( $g$ :重力加速度) である. この物体を地面から高さ  $h$  まで移動する間にする仕事  $W$  は  $W = \int_0^h (-mg) dz = -mgh$  である. 高さ  $h$  にある質量  $m$  の物体の位置エネルギーは  $U = -W = mgh$  である.

電荷  $Q$  の点電荷が原点にあるとき, 原点から  $r$  の距離  $P$  にある電荷  $q$  のもつ電氣的ポテンシャルエネルギーは無遠慮を基準にとると次式で与えられる.

$$U(r) = - \int_{\infty}^r k_0 \frac{Qq}{r^2} dr = k_0 \frac{Qq}{r}. \quad (3.1)$$

上式において  $q$  を除いた式  $V = \frac{U}{q} = k_0 \frac{Q}{r}$  を電位或いはポテンシャルという. ポテンシャルの単位は [J/C] あるいは [V](ボルト) である. 電場はポテンシャルを  $r$  について微分し符号を変えれば得られる.

$$E = -\frac{dV}{dr} = k_0 \frac{Q}{r^2}. \quad (3.2)$$

この電場の方向は  $Q$  がプラスならば  $r$  の増加する方向である. ポテンシャルはスカラー量で位置  $(x, y, z)$  の関数であるのに対して, 電場はベクトル量であり, 電場  $\vec{E}$  は次のように表される.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3.3)$$

ただし,  $E_x, E_y, E_z$  はそれぞれ  $\vec{E}$  の  $x$  成分,  $y$  成分,  $z$  成分である. なお, 位置  $A$  における電位を  $V_A$ ,  $B$  で  $V_B$  である場合,  $V_{AB} = V_A - V_B$  を  $A$  と  $B$  の電位差という.

**2つの点電荷によるポテンシャル**  $xy$ -座標の表現で  $(-r, 0)$  の点  $A$  に電荷  $-Q$  が  $(r, 0)$  の点  $B$  に電荷  $3Q$  がある場合に  $xy$  平面内のポテンシャルを求めてみよう. 点  $(x, y)$  における電位  $V(x, y)$  は  $A$  の電荷による電位と  $B$  のそれを加えれば得られる<sup>a</sup>.

$$V(x, y) = -k_0 \frac{Q}{r_1} + k_0 \frac{3Q}{r_2}. \quad (3.4)$$

$$r_1 = \sqrt{(x+r)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-r)^2 + y^2}.$$

<sup>a</sup>これをポテンシャルの重ね合わせの原理という.

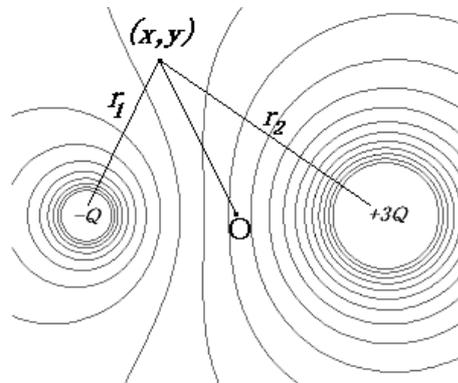


図 4: 等電位線の例

図 4 は (3.4) 式で表される電位分布の等電位線を示している<sup>5</sup>. 電荷  $3Q$  の位置から等電位線に垂直にたどり  $-Q$  の位置に到着するように線を描けば電気力線が得られる. 電場は等電位線 (面) に垂直に電位の減少する向きで, その大きさは等電位線 (面) が密であるほど大きい<sup>6</sup>.

**問 3.1** 平面内の座標  $(-a, 0)$  に電荷  $-Q$  が  $(a, 0)$  に電荷  $Q$  がある場合,  $(x, y)$  におけるポテンシヤ

<sup>5</sup>3次元空間では等電位面になる.

<sup>6</sup>等電位面が密であれば電位の変化率は大きいので (3.3) 式より電場は強いことがわかる.

ル  $V(x, y)$  から (3.3) 式より電場  $\vec{E}(E_x, E_y)$  を求めよ.

また,  $a$  が非常に小さい場合,  $V(x, y) \cong k_0 \frac{2aQx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$  であることを示せ.

問 3.1 におけるポテンシャルは 3次元では  $V(x, y, z) \cong k_0 \frac{2aQx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$  で表される. これは双極子のポテンシャルとして知られている.  $\vec{n}$  を  $-Q$  から  $Q$  に向かう単位ベクトルとして,  $\vec{p} = 2aQ\vec{n}$  と表されるベクトルを電気双極子モーメントという. 位置座標  $(x, y, z)$  をベクトル  $\vec{r}$  で表すと次の表現を得る.

$$V(\vec{r}) = k_0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (3.5)$$

## 4 コンデンサー

**絶縁体と導体** 物質内を電子が「動きにくい」か「動きやすい」かによって物質はそれぞれ**絶縁体**と**導体**という. 例えばプラスチックは前者で金属の銅は後者である. 物質の外部に電場があると内部の電子に力を及ぼす. 絶縁体の場合には電子は正電荷の原子核と強く引っ張られているので移動しないが, 導体では原子の外殻の電子が動きやすく物質の表面に移動する. 図5は絶縁体と導体の内部の電子分布を示している.  $-$  は電子をあらわし,  $+$  は電子が不足している原子 (陽イオン) を表している.

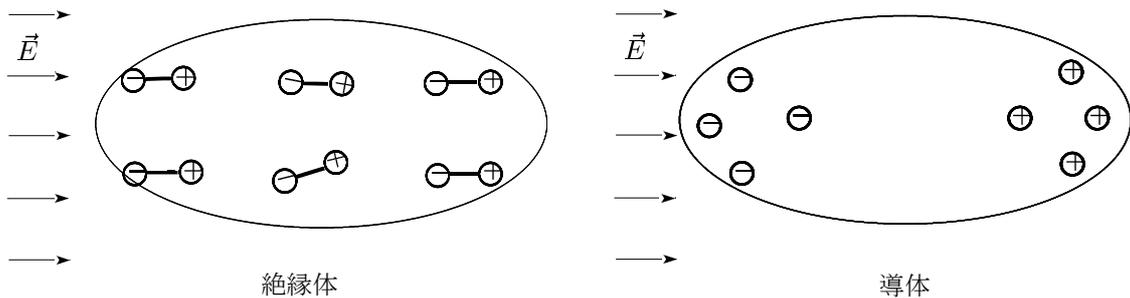


図 5: 一様な外部電場による絶縁体および導体の内部電荷分布

薄い金属板 (導体) 2枚を互いに平行に向かい合わせにした物を平板**コンデンサー**という. 両側 A, B の間を乾電池でつなぐと正負の電荷が誘起される. 電極 A, B に電位差  $V[V](V > 0)$  をかけると, A に正電荷  $Q$ , B に負電荷  $-Q$  が生じた場合, 電圧を  $p$  倍すると  $pQ$  の電荷が誘起される. すなわち,  $Q$  は  $V$  に正比例する.

$$Q = CV \quad (4.1)$$

比例定数  $C$  を**電気容量**という. 電子は目に見えないので, 水に喩えてみると理解しやすい. コンデンサーに電荷が溜まる状態はあたかも池やダム湖に水が満ちるようすに似ている. 水の量が電荷量  $Q$  に対応する. 池の広さが大きいほど満水にしたときの水量は増す. コンデンサーの電気容量  $C$  が池の広さとみると理解しやすい. また, 池に水を注ぎ込むと水深が深くなるがこのことはコンデンサーに電荷が溜まるとその両端の電位差  $V$  が高くなることに対応する. すなわち

$$\boxed{\text{池の水量}} = \boxed{\text{池の広さ}} \times \boxed{\text{池の深さ}} \iff (4.1) \text{ 式}$$

電気容量の単位は  $[C/V]$  で通常  $[F]$  (ファラッド) が使われる. 実用的には  $1F$  は大きすぎるので  $10^{-6}F$  ( $\mu F$ : マイクロファラッド) や  $10^{-12}F$  ( $pF$ : ピコファラッド) が使われる.

平板コンデンサーの電気容量 間隔  $d[\text{m}]$ , 面積  $S[\text{m}^2]$  の非常に薄くて広い金属板からなる平板コンデンサーの電気容量  $C$  を求めよう. ただし, 平板間には誘電率  $\varepsilon$  の誘電体があるとする. 平板間の電位差を  $V$  とし, 電荷  $Q$  が蓄えられたと仮定すると, 電荷の面密度は  $\sigma = \frac{Q}{S}$  である. 問 2.3 の結果から  $E = \frac{V}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}$  である. したがって次式を得る.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon S}{d}. \quad (4.2)$$

平板間が空気<sup>7</sup>では, 面積  $S = 10^{-2}\text{m}^2$ ,  $d = 10^{-3}\text{m}$  の場合,  $C = 0.9\text{pF}$  である.

#### 4.1 コンデンサーの合成

2 個のコンデンサー (容量  $C_1[\text{F}]$ , と  $C_2[\text{F}]$ ) を並列および直列に繋いだ場合の合成容量  $C$  を求めよう. 図 6 は並列に繋ぎ, 両端に電位差  $V$  をかけた場合である. この場合には電荷  $Q_1 = C_1 V$ ,  $Q_2 = C_2 V$  であり, 合成電気容量は次式で与えられる.

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = C_1 + C_2. \quad (4.3)$$

図 7 のように直列に繋ぎ, 両端に電位差  $V$  をかけた場合には両コンデンサーに溜まる電荷は等しい. したがって,  $V_1 = \frac{Q}{C_1}$ ,  $V_2 = \frac{Q}{C_2}$  であり, 合成電気容量は次式で与えられる.

$$C = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (4.4)$$

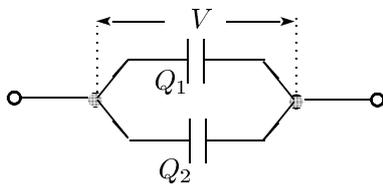


図 6: コンデンサーの並列回路

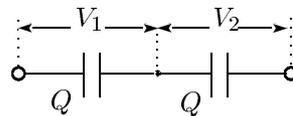


図 7: コンデンサーの直列回路

#### 4.2 静電エネルギー

電気容量  $C[\text{F}]$  のコンデンサーに電荷  $Q[\text{C}]$  が充電されている場合を考えよう. コンデンサーに電荷  $q$  だけ蓄えられているときのコンデンサー両端の電位差は  $v(q) = \frac{q}{C}$  である. したがって, コンデンサーのもつ静電エネルギー  $U$  は次の積分で得られる.

$$U = \int_0^Q v(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (4.5)$$

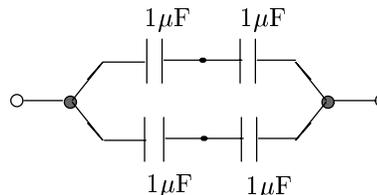
電位差  $V$  を用いてあらわすと  $U = \frac{1}{2} CV^2$  である.

<sup>7</sup>空気の誘電率は  $\varepsilon = 1.0005 \varepsilon_0$  であるので  $\varepsilon = \varepsilon_0$  とみなせる.

問 4.1 右図のコンデンサーの合成電気容量を求めよ。

問 4.2 一辺の長さが 8cm の正方形の金属板 2 枚の間が 1mm の平板コンデンサーの電気容量を求めよ。

問 4.3  $100\mu\text{F}$  のコンデンサーの両端の電位差を 10V に保つと蓄えられた電荷および静電エネルギーはいくらか。



## 5 電流

金属のような導体では原子の外殻の電子は原子核に強く拘束されていないので、周りの電場によって自由に動きうる<sup>9</sup>。質量  $m$  の電子が電場  $\vec{E}$  からうける力は  $e\vec{E}$  であるから、ニュートンの第 2 法則から  $\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$  の加速度運動をはじめめる。しかし、金属中の大量の電子が周りの原子と衝突を起こしているうちに一定の速度  $\vec{v}$  で運動するようになる<sup>10</sup>。1 秒間に流れる電荷量が 1C の場合、電流 1A (アンペア) である。あるいは、C/s である。電子は負の電荷を持つので電流の流れは電子の流れと逆の方向である。針金などの中を通過する電流  $I$  はその断面において、 $dt$  時間に通過する電荷量  $dQ$  とすると次のように微分で表現することが出来る。

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (5.1)$$

$I$  = 一定の場合、すなわち電流が時間的に変化しない場合には直流電流という。

問 5.1 1A の電流が流れている針金ではその断面において 1 秒間に電子は何個通過するか。

### 5.1 オームの法則

物質の両端に電位差 (単に電圧いう)  $V$  を与えたとき電流  $I$  が流れるとすると、電圧  $pV$  とすると電流  $pI$  流れる。これをオーム (Ohm) の法則という。すなわち、

$$V = RI, \quad (5.2)$$

比例定数  $R$  を電気抵抗という。抵抗の単位は  $[\Omega(\text{オーム})]$  で表す。上式から  $\Omega = V/A$  である。針金など (以下導線という) に流れる電流は定義から明らかのようにその断面積  $S$  に比例するので抵抗値は  $S$  に反比例することがわかる。さらに、導線の長さ  $\ell$  が長いほど電気抵抗は比例して大きくなる。したがって

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad (5.3)$$

で与えられる。係数  $\rho$  は比抵抗で物質固有の値をもつ。その単位は上式からわかるように  $[\Omega \cdot \text{m}]$  である。例えば、銅は  $1.62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  である。

問 5.2 直径 2mm、長さ 1m の銅線の電気抵抗はいくらか。

<sup>9</sup>自由に動きうる電子を自由電子という。

<sup>10</sup>この現象は雨の水滴の運動と同じである。雨滴は非常に高いところで出来、上空では加速度運動をするが、落ちてくる途中で空気との粘性抵抗をうけ、地上では一定の速さになる。

## 5.2 仕事率 (パワー)

導線の両端に電圧  $V[V]$  をかけ、電流  $I[A]$  を流すと導線内を 1 秒当たり  $I[C]$  の電荷が移動するので、電荷が 1 秒当たりする仕事量は  $IV$  である。この単位時間当たりの仕事を仕事率あるいは電力という。単位は  $[W(\text{ワット})](=[J/s])$  で表す。これは  $[VA]$  に等しい。回路に抵抗  $R[\Omega]$  がある場合にはそこで電力が消費され熱になる。これを利用した器具がニクロム線で出来ている電熱器である。電力を  $P$  とすると

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (5.4)$$

上式は抵抗値  $R$  の抵抗において 1 秒間に発生する熱量に等しい。この熱量をジュール熱という。家庭で使用される電力は通常 1 時間に対して表され、 $[kWh]$ (キロワット時) を使う。

問 5.3  $1kWh$  を単位  $J$ (ジュール) で表せ。

## 5.3 電気抵抗の合成

2 個の抵抗 ( $R_1[\Omega], R_2[\Omega]$ ) を並列および直列に繋いだ場合の合成抵抗  $R$  を求めてみよう。図 8 は **直列** に繋ぎ、両端に電圧  $V$  をかけ電流  $I$  を流した場合である。この場合には電圧  $V_1 = R_1 I$ 、 $V_2 = R_2 I$  であり、合成電気抵抗は次式で与えられる。

$$R = \frac{V_1 + V_2}{I} = R_1 + R_2. \quad (5.5)$$

図 9 のように **並列** に繋ぎ、両端に電位差  $V$  をかけた場合には  $V = R_1 I_1$ 、 $V = R_2 I_2$  であり、合成電気抵抗は次式で与えられる。

$$R = \frac{V}{I_1 + I_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5.6)$$

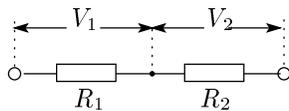


図 8: 抵抗の直列回路

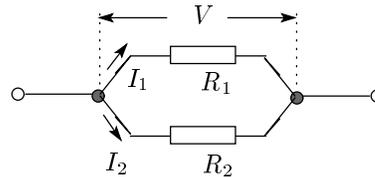
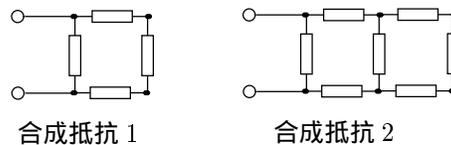


図 9: 抵抗の並列回路

問 5.4 右図の抵抗値がすべて  $r$  であるとして、合成抵抗 1 と合成抵抗 2 のそれぞれの抵抗値を求めよ。また、右端に 3 個の抵抗を次々に追加すると合成抵抗はどの値に収束するか。



## 5.4 対称性の高い回路

図 11 左における回路の合成抵抗を考えよう。抵抗値がすべて  $r$  であるとする。図に示すように  $A$  から電流  $I$  が流れ込み  $E$  から出るものとする。この場合、右の立体図のような回路とみなすことが出来る。立方体の対称性から電流  $I$  は  $A$  の地点で  $i = I/3$  ずつ 3 つに分かれ、 $B$  ではさらに

4 個の抵抗の合成例 右図の回路において抵抗値  $r_j = \bar{r} + \delta_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) とする.  $\bar{r}$  は  $r_j$  の平均値で  $\bar{r} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 r_j$  である. この合成抵抗  $R$  は (5.5), (5.6) より次式を得る.

$$R = \frac{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} = \bar{r} \left( 1 + \frac{(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4)}{4\bar{r}^2} \right)$$

したがって, 抵抗 4 個すべてが  $\bar{r}$  の 10% 以内, すなわち  $\frac{|\delta_j|}{\bar{r}} < 0.1$  である場合には相対誤差が 1% 以内で  $R = \bar{r}$  としてよいことがわかる.

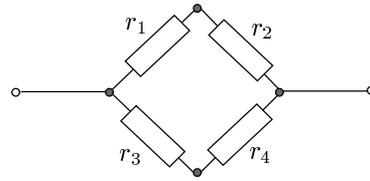


図 10: よく似た 4 個の抵抗からなる回路

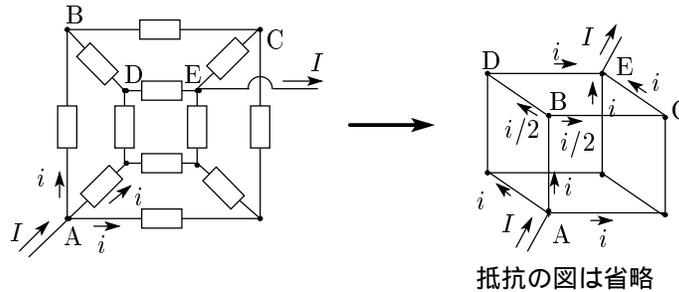


図 11: 12 個の同一の抵抗からなる高対称回路

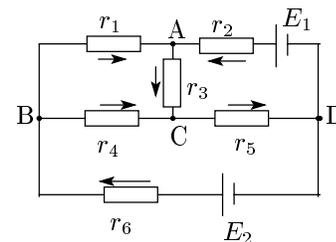
2 つに  $I/6$  ずつに分かれて流れる. したがって, AE 間の電位差  $V_{AE}$  は  $V_{AB} + V_{BC} + V_{CE}$  であるから,  $V_{AE} = r(I/3 + I/6 + I/3) = 5rI/6$ . したがって, 合成抵抗  $R = 5r/6$  である.

問 5.5 図 11 左の回路において, A から電流  $I$  が流れ込み C から出る場合には合成抵抗は  $3r/4$  であることを示せ.

(ヒント: 対称性から B と D が同電位で共に AC 間の電位  $V_{AD}$  の  $1/2$  であることを使え.)

## 5.5 キルヒホッフの法則

電池と抵抗のみを含んだ電気回路は一般に導線の結節点と導線の間の抵抗で表される. [1] 結節点に流れ込む電流値と流れ出る電流値は等しい. また, [2] ある結節点と他の結節点の間の電位差は経路によらず同じである. この法則をキルヒホッフ (Kirchhoff's laws) の法則という. 例えば右図のような回路を考えてみよう.



$r_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) を流れる電流を  $i_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) とし, それぞれ図に示す方向に流れるとすると, 点 A, B, C, D において法則 [1] を適用すると

$$i_1 + i_2 = i_3, \quad i_6 = i_1 + i_4, \quad i_3 + i_4 = i_5, \quad i_5 = i_2 + i_6$$

上式の第 1, 2, 3 から第 4 式が得られるので独立な等式は 3 個である. また, 法則 [2] を適用すると, D に対する B の電位は次の 5 通りで表される.

$$E_2 - r_6 i_6, \quad r_5 i_5 + r_4 i_4, \quad r_5 i_5 + r_3 i_3 + r_1 i_1, \quad E_1 - r_2 i_2 + r_1 i_1, \quad r_5 i_5 + r_3 i_3 + r_1 i_1.$$

上式をすべて等しいと置くと方程式が4個であるが独立な等式が3個である．したがって次のような  $i_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) についての連立方程式を得る．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & r_5 & r_6 \\ -r_1 & r_2 & 0 & r_4 & r_5 & 0 \\ r_1 & 0 & r_3 & -r_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_2 \\ E_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式はクラメル公式で解くことができる<sup>11</sup>．

## 5.6 CR 回路

図12のように起電力  $E$  の電池，電気容量が  $C$ ，電気抵抗値  $R$ ，スイッチ  $S$  からなる回路（CR 回路という）がある．スイッチ  $S$  をオンにするとコンデンサーに電荷がたまる． $S$  をオンにしてから時間  $t$  後でコンデンサーの電荷が  $Q$  であるとする．図の AB 間の電位差は  $\frac{Q}{C}$  である．電流を  $I$  とすると，抵抗の両端の電位差は  $RI$  であるので

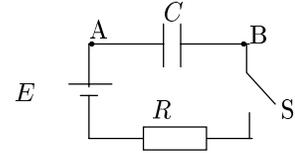


図 12: CR 回路

$$E = RI + \frac{Q}{C}. \quad (5.7)$$

(5.7) 式の両辺を微分し  $\frac{dQ}{dt} = I$  を使うと  $I$  に関する次の微分方程式を得る．

$$\frac{RdI}{dt} = -\frac{I}{C}, \quad \text{あるいは}, \quad \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC}. \quad (5.8)$$

上式の両辺を積分すると次式を得る．

$$\ln I = t/(RC) + \text{const.}, \quad \text{あるいは}, \quad I = Ae^{-t/(RC)}.$$

$A$  は定数である．時刻  $t = 0$  では  $I = \frac{E}{R}$ （初期条件）であるから．次式を得る．

$$I(t) = \frac{E}{R} e^{-t/(RC)}. \quad (5.9)$$

図13は上式のグラフである． $t = RC$  は時定数といわれ，電流が最初から  $1/e$  だけ減少するまでの時間である．コンデンサーに蓄積される電荷  $Q$  は  $I$  を積分して得られる．

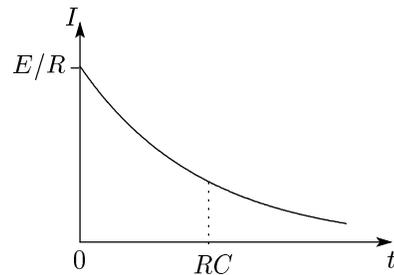


図 13: CR 回路における電流変化

$$Q = \int_0^t I(t) dt = CE \left(1 - e^{-t/(RC)}\right). \quad (5.10)$$

以上のように，電荷がコンデンサーに蓄積される現象を充電という．

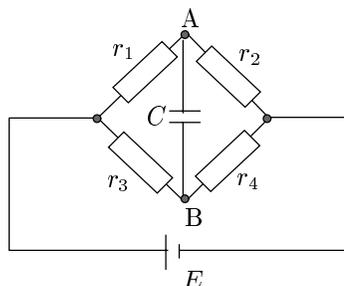
<sup>11</sup> 「物理学 ， を学ぶための数学」2006 年度改訂版 p118-120 参照．

問 5.6 抵抗  $R$  と電気容量  $C$  との積  $RC$  が時間の単位をもつことを (4.1) 式, (5.2) 式等から示せ.

問 5.7 図 12 において, 電池を外した回路では, スイッチを入れてからの経過時間  $t$  後における電荷  $Q(t)$  は次式で与えられることを示せ<sup>12</sup>. ただし, 最初コンデンサーに電荷  $Q_0$  が充電されていたものとする.

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)} \quad (5.11)$$

問 5.8 右図のように抵抗値  $r_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) の抵抗 4 個と電気容量  $C$  のコンデンサーおよび起電力  $E$  の電池からなる回路がある. AB 間の電位差  $V$  およびコンデンサーに充電されている電荷  $Q$  を求めよ.



放電回路で消費される電気的エネルギー: 問 5.7 において放電時において, 抵抗  $R$  によって消費される全電気的エネルギー  $U$  を求めてみよう.

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/(RC)}$$

であるから,

$$U = \int_0^{\infty} RI^2 dt = -\frac{Q_0^2}{RC^2} \int_0^{\infty} e^{-2t/(RC)} dt = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \quad (5.12)$$

これは最初コンデンサーに蓄えられていた電気的エネルギーに等しい<sup>13</sup>.

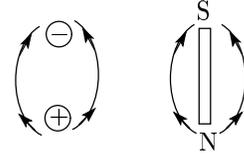
<sup>12</sup>この現象を放電という.

<sup>13</sup>(4.5) 式を参照せよ.

## 6 磁場

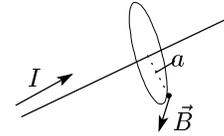
磁石（或いは磁気）の存在は紀元前から知られていた．しかし，その実体は「神秘的」なものであった．現在でも磁気の実体であるであろう「モノポール (monopole)」なるものを「探す研究」がなされているが，未だ見つかっていない．したがって現在は磁気の実体は「ダイポール (dipole)」ということになっている．その磁気ダイポールは円形電流によって得られる．小さくは鉄原子核のような原子的ダイポールから大きくは地磁気がある．

N 極と S 極 地球は大きな磁石であることから磁針 (ダイポール) が北 (North) を向く側を N 極と定義し，その反対側は南 (South) であるから S 極とする．従って，地球の北極には S 極があり磁力線は S 極に向かっている．電気力線はマイナス極に向かうので， $\ominus$  極は右図に示すように S 極に対応することがわかる．



### 6.1 電流による磁場

鉄の原子は極めて小さい磁石である．市販されている磁石はこれら原子が互いに整列して強い磁気を帯びさせ，棒状或いは U 字型にしたものである．また，山登りのとき方向を調べるために持参する所謂磁石には非常に軽くした磁針が使われている．エルステッド (Oersted 1820 年) は電流  $I$  の流れる導線のそばに磁針を近づけると振れることから磁場  $B$  が発生することを見いだした．即ち，



$$B = k' \frac{I}{a}, \quad (k' = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}) \quad (6.1)$$

$a$  は導線からの距離である．磁場  $B$  の単位は [T] (テスラ) で表される．磁場の方向は上図のように電流の方向に対して右にねじる方向である．なお，電場における「真空中の誘電率」 $\epsilon_0$  に対応する量，「真空中の透磁率」 $\mu_0$  を次のように定義する<sup>1</sup>．

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} \quad (6.2)$$

なお，後で明らかにされるが光速  $c$  との間に次の関係が成り立つ．

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ [m/s]} = c \quad (6.3)$$

1T は比較的大きい量であるのでその 1 万分の 1 の単位，ガウス ([G]) もよく使われる．大阪の地面での地磁気大きさは約 0.5G である．この量は (6.1) 式より 2.5A の電流が流れる電線から 1cm のところに発生する磁束密度に等しいことがわかる．

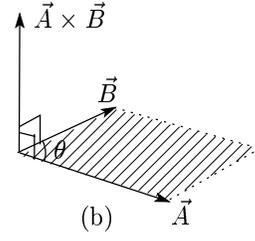
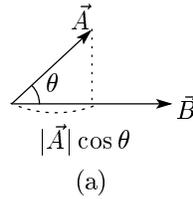
### 6.2 ベクトル演算

右図の (a) のような 2 つのベクトル  $\vec{A}$  と  $\vec{B}$  の「内積」(或いはスカラー積) は  $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$  で与えられる．ただし， $A, B$  はそれぞれ， $\vec{A}, \vec{B}$  の大きさである．また， $\vec{A} \cdot \vec{B}$  は  $\vec{A}$  の  $\vec{B}$  方向への射影  $A \cos \theta$

<sup>1</sup>後に，磁場  $\times$  面積を「磁束」と定義するので，磁場を通常「磁束密度」ともいう．

と  $B$  の積でもある。(b) のように2つのベクトル  $\vec{A}$  と  $\vec{B}$  の **外積** (或いはベクトル積)  $\vec{A} \times \vec{B}$  は  $\vec{A}$  及び  $\vec{B}$  に **垂直** で斜線で示された平行四辺形の面積  $AB \sin \theta$  の **大きさ** のベクトルである。定義から明らかなように交換則

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (6.4)$$



が成り立つ。また、次の分配則が成立する。

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}, \quad \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \quad (6.5)$$

ベクトルの直交座標による表現 直交座標の  $x, y, z$  軸の方向の単位ベクトルをそれぞれ  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  とし、ベクトル  $\vec{A}, \vec{B}$  の各軸の **成分** をそれぞれ  $A_x, A_y, A_z$ , および  $B_x, B_y, B_z$  とすると内積  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  は次式で与えられる。

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (6.6)$$

なぜなら、 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  は互いに直交しているから、 $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ 。単位ベクトルであることから  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$  である。

外積については  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ , および  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$  であることから次式を得る。

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (6.7)$$

### 6.3 ビオ・サバルの法則

(6.1) 式のように、直線電流  $I$  の周りに磁束密度  $B$  ができるが、電流が一般の **曲線** に沿って流れているとその周りにどのような磁束密度が生じるであろうか？ ビオ (Biot) とサバル (Savart) は、曲線に沿って電流  $I$  が流れているとき、曲線の微小部分  $d\vec{s}$  から生じる或位置  $P$  での磁束密度  $d\vec{B}$  は次式のベクトル積の表現で与えた。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (6.8)$$

ただし、図 14 に示すように、 $d\vec{s}$  の方向は電流の流れる方向のベクトルである。 $\vec{r}$  は  $d\vec{s}$  の位置からの  $P$  へ至る位置ベクトルである。

直線電流の周りの磁束密度  $d\vec{s}$  が常に同一直線上にあり、考える位置  $P$  が直線からの距離  $a$  の場合、 $P$  における磁束密度の大きさ  $B$  は

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} ds \quad (6.9)$$

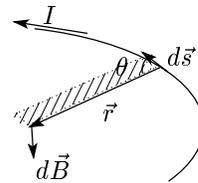


図 14: ビオ・サバルの法則

図 15 より  $\sin \theta = \frac{a}{r}$ ,  $r = \sqrt{a^2 + s^2}$  であるから

$$B = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 + s^2)^{-3/2} ds \quad (6.10)$$

関係  $s = -a \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  より変数変換  $s \rightarrow \theta$  を実行すると

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (6.11)$$

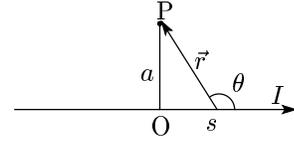


図 15: 直線電流の周りの磁束密度

が得られる<sup>2</sup>. 上式は (6.1) 式と同じである.

円電流の磁束密度 図 16 のように円電流において, 円を含む平面に垂直で円の中心の上方に  $z$  軸をとる円筒座標  $(\rho, \phi, z)$  を考える. 座標  $z$  における磁束密度  $B$  は対称性から  $z$  方向の成分のみを考慮すればよい.  $r = (z^2 + a^2)^{1/2}$ ,  $ds = a d\phi$ ,  $\cos \alpha = \frac{a}{r}$  であるから, ビオ・サバルの法則より

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (6.12)$$

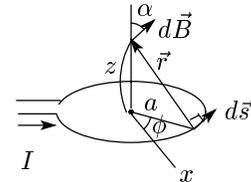


図 16: 円電流の磁束密度

$z = 0$  では,  $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$  である.

ソレノイド 導線の表面を絶縁し, 円筒に多数, 密に巻いたものを「ソレノイド (solenoid)」という. この円筒の中心軸における磁束密度を求めよう.

図 17 のように半径  $a$  の円筒の中心線上の座標  $z$  において, ソレノイドの微小な長さ  $dz$  の円電流から磁束密度  $dB$  は (6.12) より

$$dB = \frac{\mu_0 I a^2 n dz}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (6.13)$$

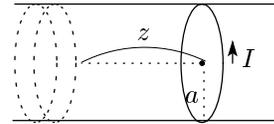


図 17: ソレノイドの磁束密度

ただし,  $n$  はソレノイドの単位長さ当たりの巻き数である.

$z = a \cot \theta$  として変数変換  $z \rightarrow \theta$  を実行すると,  $dz = -a \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$  であるから, ソレノイドが非常に長い場合には次式を得る.

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I a^2 n dz}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I n}{2} \int_\pi^0 \sin \theta d\theta = \mu_0 I n \quad (6.14)$$

## 6.4 アンペールの法則

直線電流  $I$  から距離  $a$  での磁束密度  $B$  は (6.11) で与えられる.  $2\pi a$  は半径  $a$  の円周の長さであり磁束密度の方向は円周に沿うので, 円周上の長さを  $s$  として, 次のような積分の表現を得る.

$$2\pi a B = \oint B ds = \mu_0 I \quad (6.15)$$

<sup>2</sup>  $ds = -a \frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{a}{\sin^2 \theta}$ ,  $a^2 + s^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \theta}$  より得られる.

以上のことを一般化したのが「アンペールの法則」である．すなわち，磁束密度  $\vec{B}$  の閉曲線に沿う成分を  $B_s$  とするとき，曲線に沿って測られた長さ  $s$  として次式が成り立つ．

$$\oint B_s ds = \mu_0 \sum_j I_j. \quad (6.16)$$

ここに， $I_j$  はこの閉曲線を貫く電流である．

問 6.1 ソレノイドの中心での磁束密度をアンペールの法則を使って求め，(6.14) 式と一致することを示せ．

## 7 磁場による力

### 7.1 導線間にはたらく力

2つの導線 1,2 を互いに平行に間隔  $a$  で並べ，1 に電流  $I_1$  を，2 に  $I_2$  を流すと導線 1 の「単位長さ当たり」，力  $F = I_1 B$  が電流の方向と磁束密度の方向に垂直にはたらく．この磁束密度  $B$  は (6.11) より  $B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$  である．導線 1 の「長さ  $\ell$ 」に，はたらく力は次式で与えられる．

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi a} \quad (7.1)$$

$a = 1\text{ m}$ ,  $\ell = 1\text{ m}$ ,  $I_1 = I_2 = 1\text{ A}$  では， $F = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7}\text{ N}$  である．

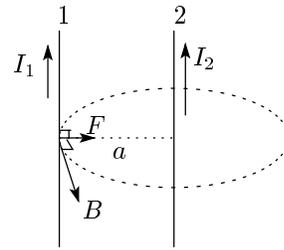


図 18: 2つの導線間にはたらく力

### 7.2 ローレンツの力

前節の現象は導線の中の電子の流れとして「微視的に」表すことができる．すなわち，磁場  $\vec{B}$  中に  $q$  の荷電粒子が速度  $\vec{v}$  で運動しているとき，その粒子にはたらく力  $\vec{F}$  は次式で与えられる．

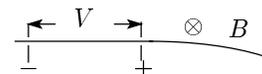
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.2)$$

上式のベクトル積の表現に注意すると電流 ( $q\vec{v}$ ) の方向から磁束密度 ( $\vec{B}$ ) の方向に「右ねじを回す」とき「ねじが進む方向」が力の方向であることがわかる．荷電粒子の位置において磁場以外に電場  $\vec{E}$  もはたらいていると

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (7.3)$$

これがローレンツの力 (Lorentz force) である．

磁場中の電子の円運動 右図のように，電圧  $V$  [V] の間を電子が左から右に加速された後，紙面の表から裏に向かう磁場  $B$  [T] 中に進むとき電子の軌道は下の方向に曲げられ円運動をする．電圧  $V$  で加速された電子の最終速さを  $v$  とすると磁場中で電子が磁場から受ける力は円の中心に向かって  $F = evB$  である．電子の質量を  $m$  とすると電



子が受ける遠心力は  $\frac{mv^2}{r}$  である。したがって、 $\frac{mv^2}{r} = evB$ 。一方、加速電圧  $V$  よりエネルギー保存則より  $eV = \frac{1}{2}mv^2$ 。これら 2 式より  $v$  を消去すると次式を得る。

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{r^2 B^2}. \quad (7.4)$$

上式は  $V$  と  $B$  を変化したときの  $r$  を測定し  $e/m$  を求めるための有用な式である<sup>3</sup>。

### 7.3 ローレンツの力の応用

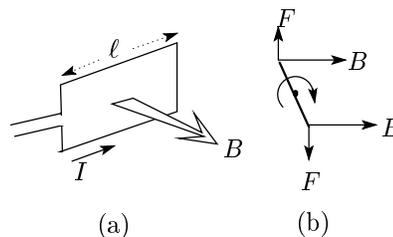
質量分析器 既知の質量  $M_0$  の 1 価イオン（電子を 1 個失ったをもつ原子）と未知の質量  $M$  の 1 価イオンを上と同じ条件で実験したときに測定された夫々の半径を  $R_0, R$  とすると

$$\frac{e}{M_0} = \frac{2V}{R_0^2 B^2}, \quad \frac{e}{M} = \frac{2V}{R^2 B^2}$$

$$M = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 M_0$$

を得る。この原理を利用したのが「質量分析器 (mass spectrograph)」である。

直流モーター 磁場による力を利用して「電気的エネルギー」を「力学的エネルギー」に換えることができる。右図 a のように磁束密度  $B$  中でコイルに電流  $I$  を流すと導線内の電子にローレンツの力  $F = IB\ell$  がはたらき、コイルが回転しようとする。電流を流す方向から眺めたのが右図 b である。この原理を応用したのがモーターである。なお、このままでは



「半回転」しかしないので、半回転すると電流の方向を変える工夫が必要である。直流モーターにおいて連続回転させる装置がコミュテーターである。

<sup>3</sup> 「物理学実験」学術図書出版 近畿大学理工学部物理学実験室編 p.195 「実験 29.  $e/m$  の測定」参照

## 8 電磁誘導

### 8.1 磁場の变化による電流の発生

図 19 のようにコイルに磁石を近づけると矢印の方向に電流  $I$  が生じる．この現象を電磁誘導という．1831 年にファラデー (Faraday) によって発見された．コイルを含む微小面積を  $dS$ ，そこを貫く磁場が面に垂直な成分を  $B_n$  としたとき，コイル内部における積分値

$$\Phi = \int_{\text{coil 内}} B_n dS$$

を磁束という．磁場の束 (たば) というイメージである．磁束の単位は  $[\text{T} \cdot \text{m}^2]$  であるがこれをウエバー  $[\text{Wb}]$  ともいう．コイルの両端の電位を  $V$  とし

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (8.5)$$

が成立する．上式をファラデーの法則という．磁束が **増加する場合** には，磁場を **減少させる方向** に電流が流れるように電位の符号が決められるので，上式のようにマイナスが付けられる．

交流発電機 直流モーターにおいてコミュテーターが装備されていない場合を考えよう．この場合，図 20a のようにモーターを手動で回すと磁束密度  $\Phi$  は図 20b を参考にすると，回転角  $\theta$  の関数として次式で与えられる．

$$\Phi = BS \cos \theta. \quad (8.6)$$

回転の角速度を  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  とすると時刻  $t$  においてコイルに発生する電圧  $V$  はファラデーの法則より次式が得られる．

$$V = -BS \sin \omega t. \quad (8.7)$$

得られるのが交流の電気エネルギーである．各家庭や工場へ送電される電力は通常，水力や原子力によって回転し発電されている．

### 8.2 自己誘導

**1 つ巻きのコイル** に電流を流すとその中心に磁場が生じるが電流に変化があればその変化量  $\frac{dI}{dt}$  に比例し磁場も変化する．その際ファラデーの法則より電流の方向とは逆の方向に流そうとする電位  $V$  が発生する．すなわち

$$V = -L \frac{dI}{dt}. \quad (8.8)$$

上式の比例定数  $L$  をインダクタンス或いは自己インダクタンスという．単位は式から明らかなように  $[\text{Vs}/\text{A}]$  である．この単位は通常ヘンリー  $[\text{H}]$  が使われる．

(6.14) 式より断面積  $S$ ，長さ  $\ell$ ，単位長さ当たりの巻き数  $n$  の **ソレノイド** では  **$nl$  個巻きのコイル** からなっているので，その磁束  $\Phi = (\mu_0 I n)(nl)S$  である．したがって， $L = \mu_0 n^2 \ell S$  である．

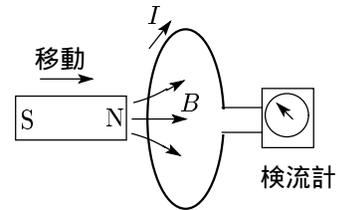


図 19: 磁場内で動く導線

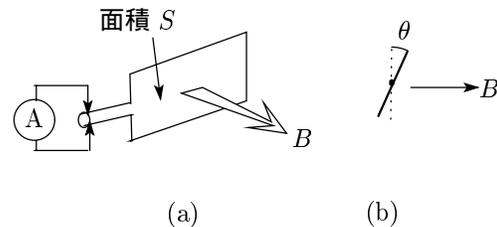


図 20: 交流発電機の原理

LR 回路 インダクタンス  $L$ [H] のコイル，抵抗値  $R$ [ $\Omega$ ]，起電力  $E$ [V] およびスイッチ  $S$  からなる図 21 のような LR 回路を考える．スイッチを入れた瞬間から測った時刻を  $t$ [s] とすると

$$E - L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (8.9)$$

上式において  $I' = \frac{E}{R} - I$  とおくと  $\frac{dI}{dt} = -\frac{dI'}{dt}$  であるから

$$\frac{dI'}{I'} = -\frac{R}{L} dt. \quad (8.10)$$

上式を積分して初期条件を考慮して解くと次式を得る<sup>4</sup>．

$$I = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (8.11)$$

上式から判るように，スイッチを入れた瞬間にはコイルの働きによって電池の電圧と同じ電位が逆方向に生じるため電流が流れない．そして，時間と共に電流が流れるようになる．やがて電流は時間に関係なく一定値  $E/R$  になり時間変化が 0 になるのでコイルの効果なくなる．

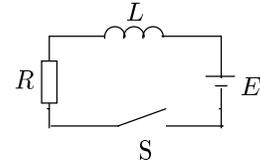


図 21: LR 回路

### 8.3 相互誘導

右の図のようにコイル 1 に電流  $I_1$  を流すと磁場が発生し，その磁場の出現でコイル 2 に誘導起電力  $V_2$  が生じる．この現象を相互誘導という．すなわち，

$$V_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (8.12)$$

係数  $M_{21}$  を相互インダクタンスという．なお，コイル 1, 2 の立場を入れ換え，2 に電流  $I_2$  の変化を与え 1 に起電力  $V_1$  を生じさせると次式が成り立つ．

$$V_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (8.13)$$

係数  $M_{12}$  は  $M_{21}$  に等しい．

変圧器 相互誘導の応用として「交流電圧を変える装置」が利用されている．上に述べたコイル 1 および 2 の巻き数をそれぞれ  $N_1, N_2$  とするとそれぞれの磁束  $\Phi_1, \Phi_2$  はそれら巻き数に比例するからコイル 1 における電圧  $V_1$  の交流によって得られるコイル 2 での電圧  $V_2$  は次式で与えられる．

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \quad (8.14)$$

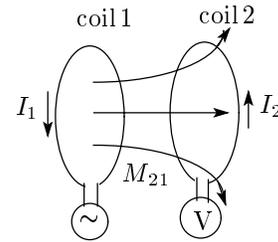


図 22: 相互誘導

<sup>4</sup> $\ln I' = -\frac{Rt}{L} + \text{const.}, \quad I' = Ae^{-Rt/L}, \quad t = 0$  のとき  $I = 0$  であるから  $I' = A = \frac{E}{R}$  を得る．

## 9 交流回路

以上において述べられたように，電流に変化がある場合には磁氣的現象を考慮しなければならない．各家庭に導入される電気は，三角関数で表される電圧変化の交流である．周波数を  $f[\text{s}^{-1}]$  (或いは  $[\text{Hz}]$  : ヘルツ) とすると時刻  $t$  における電圧  $V$  は次式で与えられる．

$$V(t) = V_0 \sin 2\pi ft \quad (9.1)$$

$V$  は  $-V_0$  と  $+V_0$  の間を繰り返して変化する．その周期は  $T = \frac{1}{f}[\text{s}]$  である．

### 9.1 抵抗のみの回路の電力

$I(t) = I_0 \sin 2\pi ft$  で表される電流が流れる電気抵抗  $R$  のみの回路における電位  $V$  は

$$V(t) = V_0 \sin 2\pi ft, \quad (V_0 = RI_0), \quad (9.2)$$

で与えられる．回路で消費される電力  $W$  は

$$W(t) = V(t)I(t) = \frac{\{V(t)\}^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} \sin^2 2\pi ft. \quad (9.3)$$

上式を 1 周期について平均すると， $fT = 1$  であるから

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt = \frac{V_0^2}{2TR} \int_0^T (1 - \cos 4\pi ft) dt = \frac{V_0^2}{2R} \left(1 - \frac{\sin 4\pi fT}{4\pi fT}\right) = \frac{V_0^2}{2R} \quad (9.4)$$

電圧および電流の実効値として  $V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ ， $I_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}R}$  とすると，通常の電力表示  $\langle W \rangle = V_e I_e$  が得られる．日本の家庭では  $V_e = 100\text{V}$  であるから， $V_0 = 141\text{V}$  である．

### 9.2 コイルのみの回路

$I(t) = I_0 \sin 2\pi ft$  で表される電流が流れるコイル (自己インダクタンス  $L$ ) のみの回路において現れる電位  $V$  は

$$V - L \frac{dI}{dt} = 0. \quad V(t) = 2\pi f L I_0 \cos 2\pi ft = 2\pi f L I_0 \sin \left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.5)$$

上式より抵抗に対応する量  $2\pi f L$  を誘導リアクタンスという．

### 9.3 コンデンサーのみの回路

$I(t) = I_0 \sin 2\pi ft$  で表される電流が流れるコンデンサー (電気容量  $C$ ) のみの回路において現れる電位  $V$  は次式を満たす．

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = I_0 \sin 2\pi ft \quad (9.6)$$

従って，

$$V(t) = \frac{I_0}{C} \int \sin 2\pi ft dt = -\frac{I_0}{2\pi f C} \cos 2\pi ft = \frac{I_0}{2\pi f C} \sin \left(2\pi ft - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.7)$$

上式において抵抗に対応する量  $1/(2\pi f C)$  を容量リアクタンスという．

## 9.4 RLC の直列回路

$I(t) = I_0 \sin 2\pi f t$  で表される電流が流れる RLC の直列回路においては

$$V(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt = I_0 R \sin 2\pi f t + I_0 \left( 2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} \right) \cos 2\pi f t. \quad (9.8)$$

この回路におけるインピーダンス<sup>5</sup> (impedance) を  $Z$ , 角度  $\phi$  として

$$V(t) = Z I_0 \sin(2\pi f t + \phi), \quad (9.9)$$

とすると

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( 2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} \right)^2} \quad (9.10)$$

$$\phi = \arctan \left[ \frac{1}{R} \left( 2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} \right) \right] \quad (9.11)$$

特に,  $2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} = 0$  のときインピーダンスが最小になり回路内では電流が最大になる. このときの周波数  $f_r$  を共振周波数という. すなわち,

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (9.12)$$

例えば,  $L = 1.0 \times 10^{-4} \text{H}$ ,  $C = 1.0 \times 10^{-10} \text{F}$  とすると,  $f_r = 1.59 \times 10^6 \text{Hz}$  である. これは中波の電波域である.

## 9.5 交流の複素数表現

以上では, 交流の電流  $I(t)$  は三角関数で表されたが, 他に複素数表現がある. 電流の振幅を  $I_0$ , 周波数を  $f$ , 初期位相を 0 とするとき, 次式で与えられる.

$$I(t) = I_0 e^{2\pi i f t} \quad (9.13)$$

抵抗  $R$  のみの回路ではその両端の電位は  $V_0 = R I_0$  とおくと,

$$V(t) = R I(t) = V_0 e^{2\pi i f t}. \quad (9.14)$$

コイルのみの回路では

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = L I_0 (2\pi i f) e^{2\pi i f t}. \quad (9.15)$$

然るに,  $i = e^{i\pi/2}$  であるので,

$$V(t) = L I_0 (2\pi f) e^{2\pi i f t + i\pi/2} = 2\pi f L I(t) e^{i\pi/2}. \quad (9.16)$$

コンデンサーのみの回路では

$$V(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{I_0}{2\pi i f C} e^{2\pi i f t}. \quad (9.17)$$

然るに,  $1/i = -i = e^{-i\pi/2}$  であるので,

$$V(t) = \frac{I_0}{2\pi f C} e^{2\pi i f t - i\pi/2} = \frac{1}{2\pi f C} I(t) e^{-i\pi/2}. \quad (9.18)$$

<sup>5</sup>通常の抵抗, 誘導リアクタンス, 容量リアクタンスなどを総称してインピーダンスという.