最小２乗法（２変数の場合）

1　パラメータの最確値

物理量 $X,\ Y$ の間に，2 つのパラメータ $a,\ b$ として

$$F(X, Y; a, b) = 0 \tag{1}$$

が成り立つとき，$X,\ Y$ に対する n 組の測定値 $(x_i,\ y_i)\quad (i = 1, \ldots n)$ が得られたとする．これらの誤差 $(\xi_i,\ \eta_i)$ の確率密度関数はガウス分布に従うものとする[1]．簡単のためにいずれの測定値も同じ精度で得ることができると仮定する．パラメータ $a,\ b$ の最確値は，残差の 2 乗和

$$S = \sum_{i=1}^{n} (V_{xi}^2 + V_{yi}^2) \tag{2}$$

が，次の n 個の条件のもとで最小になるような値として与えられる[2]．

$$F(X_i, Y_i, a, b) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

ここで，

$$V_{xi} = x_i - X_i, \quad V_{yi} = y_i - Y_i \tag{4}$$

(3) はパラメータや変数に対して一般には非線型であるので，測定値 $(x_i,\ y_i)$ およびパラメータの近似値 $(a_0,\ b_0)$ の近傍で Talor 展開し，線型式に変形する．パラメータの補正値を $A,\ B$ とする．すなわち

$$a = a_0 - A, \qquad b = b_0 - B \tag{5}$$

(3) を $X_i = x_i,\ Y_i = y_i,\ a = a_0,\ b = b_0$ の近傍で展開し第 1 次の項のみを考慮すると

$$F_{xi}V_{xi} + F_{yi}V_{yi} + F_{ai}A + F_{bi}B = F_{0i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

ただし，$F_{0i}, F_{xi}, F_{yi}, F_{ai}, F_{bi}$ は (1) および X, Y, a, b の導関数において，$X_i = x_i,\ Y_i = y_i,\ a = a_0,\ b = b_0$ を代入した値である．(2) を最小にするには，その変分をとって

$$\sum_{i=1}^{n} (V_{xi}\delta V_{xi} + V_{yi}\delta V_{yi}) = 0 \tag{7}$$

(6) の変分より

$$F_{xi}\delta V_{xi} + F_{yi}\delta V_{yi} + F_{ai}\delta A + F_{bi}\delta B = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

n 個の未定乗数 λ_i を (8) の各式に乗じ，(7) より差し引き，各変分 $\delta V_{xi},\ \delta V_{yi},\ \delta A,\ \delta B$ の係数をそれぞれ 0 とおくことによって次式を得る．

$$V_{xi} = \lambda_i F_{xi}, \quad V_{yi} = \lambda_i F_{yi} \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_{ai} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_{bi} = 0 \tag{10}$$

[1] 確率変数 ξ の確率密度は，$p(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/2\sigma^2}$，ただし，$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi) \mathrm{d}\xi$

[2] $X,\ Y$ の測定精度が異なり，$<\xi^2> = \sigma^2/w_x,\ <\eta^2> = \sigma^2/w_y$ の場合，$S = \sum_i \left(w_x V_{xi}^2 + w_y V_{yi}^2\right)$ とし，以下の記述で $L_i = F_{xi}^2/w_x + F_{yi}^2/w_y$ とすればよい．

(9) を (6) に代入し λ_i を求めると，

$$\lambda_i = \frac{1}{L_i}(F_{0i} - F_{ai}A - F_{bi}B) \tag{11}$$

$$\text{ただし，} \qquad L_i = F_{xi}^2 + F_{yi}^2 \tag{12}$$

(11) を (10) に代入すると，A，B に関する連立方程式を得る．

$$\begin{pmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [ao] \\ [bo] \end{pmatrix} \tag{13}$$

ただし

$$C = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{F_{ai}F_{ai}}{L_i} & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{F_{ai}F_{bi}}{L_i} \\ \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{F_{ai}F_{bi}}{L_i} & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{F_{bi}F_{bi}}{L_i} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$[ao] = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ai}F_{0i}}{L_i},\ [bo] = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{bi}F_{0i}}{L_i} \tag{15}$$

上式を解いて得られた A，B より (5) から求められる a，b を新たに a_0，b_0 として連立方程式を再度解き，補正値 A，B が 0 に収束するまで繰り返す．このようにして得られる a，b が最確値 $\bar{a}$，$\bar{b}$ である．

2 測定値の最確値および残差

(11) で $A = 0$，$B = 0$ とおき，$F_i = F(x_i, y_i, \bar{a}, \bar{b})$ とすると $\lambda_i = \dfrac{F_i}{L_i}$．これを (9) に代入し残差

$$V_{xi} = \frac{F_i F_{xi}}{L_i}, \quad V_{yi} = \frac{F_i F_{yi}}{L_i} \tag{16}$$

を得る．上式の 2 乗和をとり (12) を使うと

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2}{L_i} \tag{17}$$

ここに (16),(17) における関数値は，$x = x_i$，$y = y_i$，$a = \bar{a}$，$b = \bar{b}$ に対する値である．測定値の最確値 $\bar{x}_i$，$\bar{y}_i$ は測定値 x_i，y_i より (16) を差し引いた値である．

3 パラメータの最確値の標準誤差

測定値 x_i，y_i の誤差を ξ_i，η_i，パラメータの最確値 $\bar{a}$，$\bar{b}$ の誤差を α，β とすると，(6) と類似な式

$$F_{xi}\xi_i + F_{yi}\eta_i + F_{ai}\alpha + F_{bi}\beta = F_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

が成り立つ．(13) の左辺の A，B を 0 とし，(15) の各右辺の F_{0i} を上式の F_i に置き換えると次式が得られる．

$$[aa]\alpha + [ab]\beta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ai}(F_{xi}\xi_i + F_{yi}\eta_i)}{L_i} \tag{19}$$

$$[ab]\alpha + [bb]\beta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{bi}(F_{xi}\xi_i + F_{yi}\eta_i)}{L_i} \tag{20}$$

$\alpha,\ \beta$ について解くと，

$$\alpha = \frac{[ab]G_2 - [bb]G_1}{D}, \qquad \beta = \frac{[ab]G_1 - [aa]G_2}{D} \tag{21}$$

ただし，

$$G_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ai}(F_{xi}\xi_i + F_{yi}\eta_i)}{L_i}, \tag{22}$$

$$G_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{bi}(F_{xi}\xi_i + F_{yi}\eta_i)}{L_i}, \tag{23}$$

$$D = [aa][bb] - [ab]^2 \tag{24}$$

S の期待値 $< S >$ を求める[3]．　(18) より

$$\begin{aligned} < S > &= \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{xi}^2 < \xi_i^2 >}{L_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{yi}^2 < \eta_i^2 >}{L_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ai}^2 < \alpha^2 >}{L_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{bi}^2 < \beta^2 >}{L_i} \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ai}F_{bi} < \alpha\beta >}{L_i} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{xi}F_{ai} < \xi_i\alpha >}{L_i} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{xi}F_{bi} < \xi_i\beta >}{L_i} \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{yi}F_{ai} < \eta_i\alpha >}{L_i} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{yi}F_{bi} < \eta_i\beta >}{L_i} \end{aligned}$$

しかるに，

$$< \xi_i\xi_j >= \sigma^2\delta_{ij},\ < \eta_i\eta_j >= \sigma^2\delta_{ij},\ < \xi_i\eta_j >= 0 \tag{25}$$

であるから，(12),(14),(19),(20) を考慮すると

$$\begin{aligned} < S > &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + [aa] < \alpha^2 > +[bb] < \beta^2 > +2[ab] < \alpha\beta > \\ &- 2\left([aa] < \alpha^2 > +[ab] < \alpha\beta >\right) - 2\left([ab] < \alpha\beta > +[bb] < \beta^2 >\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad < S >= n\sigma^2 - [aa] < \alpha^2 > -[bb] < \beta^2 > -2[ab] < \alpha\beta > \tag{26}$$

ところで

$$< G_1^2 >= \sum_i \sum_j \frac{F_{ai}F_{aj} < (F_{xi}\xi_i + F_{yi}\eta_i)(F_{xj}\xi_j + F_{yj}\eta_j) >}{L_iL_j} = \sigma^2[aa] \tag{27}$$

$$< G_2^2 >= \sum_i \sum_j \frac{F_{bi}F_{bj} < (F_{xi}\xi_i + F_{yi}\eta_i)(F_{xj}\xi_j + F_{yj}\eta_j) >}{L_iL_j} = \sigma^2[bb] \tag{28}$$

$$< G_1G_2 >= \sum_i \sum_j \frac{F_{ai}F_{bj} < (F_{xi}\xi_i + F_{yi}\eta_i)(F_{xj}\xi_j + F_{yj}\eta_j) >}{L_iL_j} = \sigma^2[ab] \tag{29}$$

ゆえに

$$< \alpha^2 > = \frac{[ab]^2 < G_2^2 > +[bb]^2 < G_1^2 > -2[ab][bb] < G_1G_2 >}{D^2} = \frac{[bb]\sigma^2}{D} \tag{30}$$

$$< \beta^2 > = \frac{[ab]^2 < G_1^2 > +[aa]^2 < G_2^2 > -2[ab][aa] < G_1G_2 >}{D^2} = \frac{[aa]\sigma^2}{D} \tag{31}$$

$$< \alpha\beta > = \frac{([ab]^2 + [aa][bb]) < G_1G_2 > -[aa][ab] < G_2^2 > -[ab][bb] < G_1^2 >}{D^2} = -\frac{[ab]\sigma^2}{D} \tag{32}$$

[3] 物理量 $g(\xi)$ の期待値は $< g >= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi$ である．

したがって，次のように S の期待値は簡略な式になる．

$$< S > \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{< F_i^2 >}{L_i} = (n-2)\sigma^2$$

測定数が多い場合には $< S >$ は (17) の S と近似できるのでパラメータの標準誤差は

$$\sigma_a = \sqrt{< \alpha^2 >} = \sqrt{\frac{[bb]\ S}{(n-2)D}}, \qquad \sigma_b = \sqrt{< \beta^2 >} = \sqrt{\frac{[aa]\ S}{(n-2)D}} \tag{33}$$

なお，$< \alpha^2 >, < \beta^2 >, < \alpha\beta >$ の導出は以下のようにベクトル $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ と行列 G_x, G_y を定義すると分かりやすい．

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \qquad G_x = \begin{pmatrix} \dfrac{F_{a1}F_{x1}}{L_i} & \dfrac{F_{a2}F_{x2}}{L_i} & \cdots & \dfrac{F_{an}F_{xn}}{L_i} \\ \\ \dfrac{F_{b1}F_{x1}}{L_i} & \dfrac{F_{b2}F_{x2}}{L_i} & \cdots & \dfrac{F_{bn}F_{xn}}{L_i} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \qquad G_y = \begin{pmatrix} \dfrac{F_{a1}F_{y1}}{L_i} & \dfrac{F_{a2}F_{y2}}{L_i} & \cdots & \dfrac{F_{an}F_{yn}}{L_i} \\ \\ \dfrac{F_{b1}F_{y1}}{L_i} & \dfrac{F_{b2}F_{y2}}{L_i} & \cdots & \dfrac{F_{bn}F_{yn}}{L_i} \end{pmatrix}$$

とすると，(21) と同等の次式が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \boldsymbol{\delta} = C^{-1}(G_x\boldsymbol{\xi} + G_y\boldsymbol{\eta})$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} < \alpha^2 > & < \alpha\beta > \\ < \alpha\beta > & < \beta^2 > \end{pmatrix} = < \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\delta}} > = C^{-1}\left(G_x < \boldsymbol{\xi}\tilde{\boldsymbol{\xi}} > \tilde{G}_x + G_y < \boldsymbol{\eta}\tilde{\boldsymbol{\eta}} > \tilde{G}_y\right) C^{-1}$$

n 行 n 列の単位行列を E とすると，

$$< \boldsymbol{\xi}\tilde{\boldsymbol{\xi}} > = < \boldsymbol{\eta}\tilde{\boldsymbol{\eta}} > = \sigma^2 E$$

また $G_x\tilde{G}_x + G_y\tilde{G}_y = C$ であるから

$$\begin{pmatrix} < \alpha^2 > & < \alpha\beta > \\ < \alpha\beta > & < \beta^2 > \end{pmatrix} = C^{-1}\sigma^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{[bb]}{D} & -\dfrac{[ab]}{D} \\ \\ -\dfrac{[ab]}{D} & \dfrac{[aa]}{D} \end{pmatrix} \sigma^2$$

を得る．以上の導出方法は物理量の数，パラメータの数の如何にかかわらずに利用できる．

4　当てはめの関数の例

1) $F(X,Y,a,b) = Y - aX - b$ の場合（金属抵抗の温度変化）
$F_{0i} = y_i - a_0 x_i - b_0,\ F_x = -a,\ F_y = 1, F_a = -X,\ F_b = -1$
$L_i = a_0^2 + 1,\ [aa] = \sum_i (x_i^2/L_i), [ab] = \sum_i (x_i/L_i),\ [bb] = \sum_i (1/L_i) = n/(a_0^2+1)$
$[a0] = -\sum_i (x_i F_{0i}/L_i), [b0] = -\sum_i (F_{0i}/L_i)$

2) $F(X,Y,a,b) = \ln Y - aX - b$ の場合（コンデンサーの放電）
$F_{0i} = \ln y_i - a_0 x_i - b_0,\ F_x = -a,\ F_y = 1/Y, F_a = -X,\ F_b = -1$
$L_i = a_0^2 + \dfrac{1}{y_i^2},\ [aa] = \sum_i (x_i^2/L_i), [ab] = \sum_i (x_i/L_i),\ [bb] = \sum_i (1/L_i)$
$[a0] = -\sum_i (x_i F_{0i}/L_i), [b0] = -\sum_i (F_{0i}/L_i)$

3) $F(X,Y,a,b) = \ln Y - a\ln X - b$ の場合（フラクタル次元）
$F_{0i} = \ln y_i - a_0 \ln x_i - b_0,\ F_x = -a/X,\ F_y = 1/Y, F_a = -\ln X,\ F_b = -1$
$L_i = \dfrac{a_0^2}{x_i^2} + \dfrac{1}{y_i^2},\ [aa] = \sum_i \{(\ln x_i)^2/L_i\}, [ab] = \sum_i (\ln x_i/L_i),\ [bb] = \sum_i (1/L_i)$
$[a0] = -\sum_i (F_{0i} \ln x_i/L_i), [b0] = -\sum_i (F_{0i}/L_i)$

4) $F(X,Y,a,b) = \ln Y - \dfrac{a}{X} - b$ の場合（半導体抵抗の温度変化）
$F_{0i} = \ln y_i - \dfrac{a_0}{x_i} - b_0,\ F_x = a/X^2,\ F_y = 1/Y, F_a = -1/X,\ F_b = -1$
$L_i = \dfrac{a_0^2}{x_i^4} + \dfrac{1}{y_i^2},\ [aa] = \sum_i 1/(L_i x_i^2), [ab] = \sum_i 1/(L_i x_i),\ [bb] = \sum_i (1/L_i)$
$[a0] = -\sum_i F_{0i}/(L_i x_i), [b0] = -\sum_i F_{0i}/L_i$

5　特殊な例

振り子の周期を求めるような場合に，タイマーの読みを y_i，とするとき，回数 i には誤差がないので当てはめの関数は周期を a，初期時刻を b として，

$$F(i,Y,a,b) = Y - a(i-1) - b \tag{34}$$

で与えられる．測定値 $y_i \quad (i = 1,\ldots,n)$ に対して

$$S = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - a(i-1) - b\}^2 \tag{35}$$

が最小になる a，b の値 $\bar{a}$，$\bar{b}$ を求める．　$\dfrac{\partial S}{\partial a} = 0,\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ より

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)\{y_i - \bar{a}(i-1) - \bar{b}\} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \{y_i - \bar{a}(i-1) - \bar{b}\} = 0 \tag{36}$$

より次式を得る．

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\bar{a} + \frac{(n-1)n}{2}\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} (i-1)y_i, \qquad \frac{(n-1)n}{2}\bar{a} + n\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{37}$$

a, b について解くと

$$\bar{a} = \frac{6}{(n-1)n(n+1)}\left\{2\sum_{i=1}^{n}(i-1)y_i - (n-1)\sum_{i=1}^{n}y_i\right\} \tag{38}$$

$$\bar{b} = \frac{2}{n(n+1)}\left\{(2n-1)\sum_{i=1}^{n}y_i - 3\sum_{i=1}^{n}(i-1)y_i\right\} \tag{39}$$

(38) の { } の項は次のように書き直せる．

$$2\sum_{i=1}^{n}(i-1)y_i - (n-1)\sum_{i=1}^{n}y_i = \sum_{i=1}^{n}\{2(i-1)-(n-1)\}y_i$$

$$\begin{aligned} &= -(n-1)y_1-(n-3)y_2-(n-5)y_3 \ \ldots + (n-5)y_{n-2}+(n-3)y_{n-1}+(n-1)y_n \\ &= (n-1)(y_n-y_1)+(n-3)(y_{n-1}-y_2)+(n-5)(y_{n-2}-y_3)+\ldots \end{aligned}$$

測定の個数 n が奇数である場合[4]，$n = 2m+1$ とおくと

$$(2m)^2+(2m-2)^2+\ldots+4^2+2^2 = 4\{m^2+(m-1)^2+\ldots+2^2+1^2\} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \tag{40}$$

であるので，(38) は $w_k = (n-2k)^2$, $T_k = (y_{n-k}-y_k)/(n-2k)$ とおくと，

$$\bar{a} = \frac{w_1T_1+w_2T_2+w_3T_3+\ldots}{w_1+w_2+w_3+\ldots} \tag{41}$$

と書ける．すなわち $\bar{a}$ は $(n-2k)^2$ を重みとして平均した値であると解釈できる．

y_i の誤差を η_i,$\bar{a}$, $\bar{b}$ の誤差を α, β とすると，真値 Y_i, a, b に対して $Y_i - a(i-1) - b = 0$ が成立するので

$$\eta_i - \alpha(i-1) - \beta = y_i - \bar{a}(i-1) - \bar{b} \tag{42}$$

この式を (36) に代入すると次式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)\{\eta_i-\alpha(i-1)-\beta\} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\{\eta_i-\alpha(i-1)-\beta\} = 0 \tag{43}$$

上式を α, β について解くと

$$\alpha = \frac{6}{(n-1)n(n+1)}\left\{2\sum_{i=1}^{n}(i-1)\eta_i - (n-1)\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\} \tag{44}$$

$$\beta = \frac{2}{n(n+1)}\left\{(2n-1)\sum_{i=1}^{n}\eta_i - 3\sum_{i=1}^{n}(i-1)\eta_i\right\} \tag{45}$$

期待値 $<\eta_i\eta_j>$ は $i \neq j$ では 0，$i = j$ では σ^2 である．したがって

$$\begin{aligned} <\alpha^2> &= \frac{6^2\sigma^2}{(n-1)^2n^2(n+1)^2}\left\{4\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2+(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}1-4(n-1)\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right\} \\ &= \frac{6^2\sigma^2}{(n-1)^2n^2(n+1)^2}\left\{4\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+(n-1)^2n-4(n-1)\frac{(n-1)n}{2}\right\} \\ &= \frac{12}{(n-1)n(n+1)}\sigma^2 \end{aligned}$$

[4] $n = 2m$ の場合にも同様な式が得られる．$(2m-1)^2+(2m-3)^2+\ldots+3^2+1^2 = \sum_{k=1}^{2m}k^2 - \sum_{l=1}^{m}(2l)^2$
$= \frac{2m(2m+1)(4m+1)}{6} - 4\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{m(2m+1)(2m-1)}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

また，

$$\begin{aligned}
<\beta^2> &= \frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\left\{(2n-1)^2\sum_{i=1}^{n}1+9\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2-6(2n-1)\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right\} \\
&= \frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\left\{(2n-1)^2 n+9\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-6(2n-1)\frac{(n-1)n}{2}\right\} \\
&= \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}\sigma^2
\end{aligned}$$

さらに $<S>$ は，　$<S>=\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\alpha(i-1)-\beta)^2$

$$=n\sigma^2+<\alpha^2>\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2+n<\beta^2>-2\sum_{i=1}^{n}(i-1)<\eta_i\alpha>-2\sum_{i=1}^{n}<\eta_i\beta>+2<\alpha\beta>\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

然るに

$$\begin{aligned}
<\alpha\beta> &= \frac{12\sigma^2}{(n-1)n^2(n+1)^2}\left\{(7n-5)\sum_{i=1}^{n}(i-1)-6\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2-(n-1)(2n-1)\sum_{i=1}^{n}1\right\} \\
&= \frac{12\sigma^2}{(n-1)n^2(n+1)^2}\left\{(7n-5)\frac{(n-1)n}{2}-6\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-(n-1)(2n-1)n\right\} \\
&= -\frac{6\sigma^2}{n(n+1)} \\
\sum_{i=1}^{n}(i-1)<\eta_i\alpha> &= \frac{6\sigma^2}{(n-1)n(n+1)}\left\{2\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2-(n-1)\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right\}=\sigma^2 \\
\sum_{i=1}^{n}<\eta_i\beta> &= \frac{2\sigma^2}{n(n+1)}\left\{(2n-1)\sum_{i=1}^{n}1-3\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right\}=\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \frac{<S>}{\sigma^2} &= n+\frac{12}{(n-1)n(n+1)}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+n\frac{2(2n-1)}{n(n+1)}-2-2-2\frac{6}{n(n+1)}\frac{(n-1)n}{2} \\
&= n-4+\frac{2(2n-1)+2(2n-1)-6(n-1)}{n+1}=n-2
\end{aligned}$$

測定回数が多い場合には $<S>$ を S としてよいからパラメータ $a,\ b$ の最確値の標準誤差は

$$\sigma_a=\sqrt{<\alpha^2>}=\sqrt{\frac{12S}{(n-1)n(n+1)(n-2)}}, \tag{46}$$

$$\sigma_b=\sqrt{<\beta^2>}=\sqrt{\frac{2(2n-1)S}{n(n+1)(n-2)}} \tag{47}$$

一般式の導出において定義した量を使うと

$$[aa]=\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},\quad [ab]=\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{(n-1)n}{2},\quad [bb]=n$$

$D=[aa][bb]-[ab]^2=\dfrac{(n-1)n^2(n+1)}{12}$ であるから，(33) より (46),(47) を確かめることができる．