正 20 面体の頂点の座標

正 20 面体の 12 個の頂点 $\mathrm{P}_j\,(j=1,2,\ldots,12)$ を通る球面の半径を R，頂点間の近接距離を a とすると，図 1 に示すように，正 3 角形をなす各頂点の座標を $\mathrm{P}_1=(0,0,R)$, $\mathrm{P}_2(x,-a/2,z)$, $\mathrm{P}_3=(x,a/2,z)$ とすると次式が成り立つ．

$$x^2+\frac{a^2}{4}+z^2=R^2,\quad x^2+\frac{a^2}{4}+(R-z)^2=a^2. \qquad (1)$$

したがって，

$$\frac{z}{a}=\frac{R}{a}-\frac{a}{2R},\quad \frac{x}{a}=\frac{1}{2}\sqrt{3-\left(\frac{a}{R}\right)}. \qquad (2)$$

しかるに，

$$\frac{R}{a}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \qquad (3)$$

である[a]．

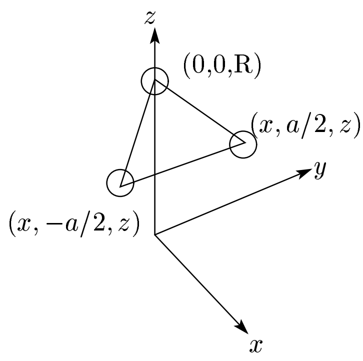

図 1: 3 個の位置

[a]「数学辞典　岩波書店」;「SEI TAMENTAI 正多面体」の項

$\mathrm{P}_4,\mathrm{P}_5,\mathrm{P}_6$ の位置座標をそれぞれ，(x_4,y_4,z), (x_5,y_5,z), (x_6,y_6,z) とすると次式で与えられる．

$$x_{j+3}=x\cos j\alpha-\frac{a}{2}\sin j\alpha,\quad y_{j+3}=x\sin j\alpha+\frac{a}{2}\cos j\alpha. \quad (j=1,2,3)\ \ \alpha=\frac{2\pi}{5} \qquad (4)$$

$\mathrm{P}_j\ (x_j,y_j,z_j)\ (j=7,\ldots,12)$ は $\mathrm{P}_j\ (j=1,\ldots,6)$ の点対称の点として次のように与えられる．

$$x_{13-j}=-x_j,\quad y_{13-j}=-y_j,\quad z_{13-j}=-z_j. \quad (j=1,\ldots,6). \qquad (5)$$

サッカボールの頂点の座標

図 2 のように正 3 角形 P_1,P_2,P_3 の各辺の 2 個の 3 等分点から得られる正 6 角形はサッカーボールの頂点である．正 20 面体の 30 個の近接頂点 $\mathrm{P}_j\,(x_j,y_j,z_j)$,$\mathrm{P}_k\,(x_k,y_k,z_k)$ 間の 2 個の内分点は $(\frac{1}{3}[2x_j+x_k],\frac{1}{3}[2y_j+y_k],\frac{1}{3}[2z_j+z_k])$ と $(\frac{1}{3}[x_j+2x_k],\frac{1}{3}[y_j+2y_k],\frac{1}{3}[z_j+2z_k])$ である．得られる 60 個の内分点がサッカボールの頂点である．これらの近接点すべて結び，陰線処理をしたものが図 3 である．

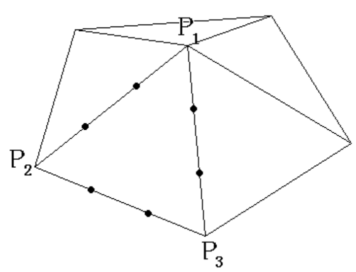

図 2: P_1,P_2,P_3 から得られる 6 点

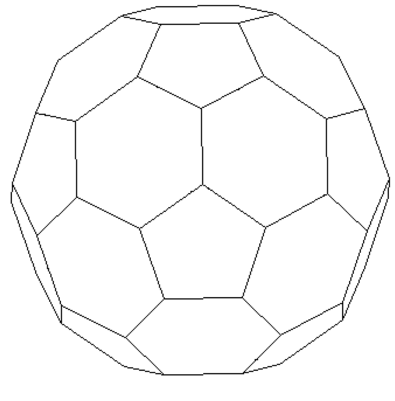

図 3: サッカボールの頂点