1 エイトフ図法による天球表現

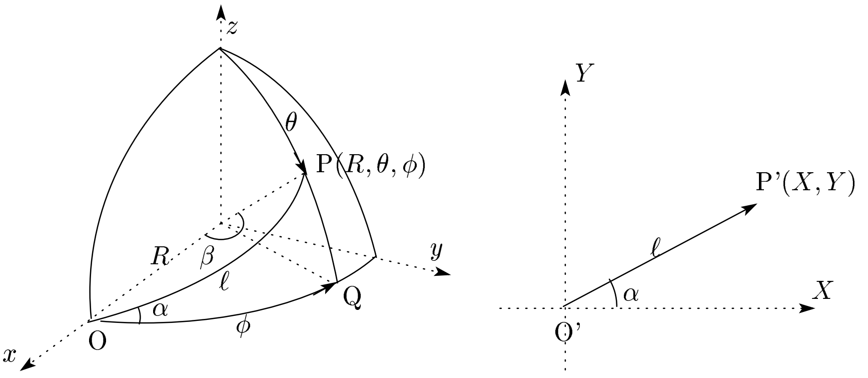

図 1: 正距方位図法

図 1 左のように，半径 R の球面を考える．球面上の任意の点 O より大円に沿った xy 平面より角 α の方向に距離 ℓ の点を P とする．点 P を球座標 (R, θ, ϕ) で表わす．この点を図 1 右の原点 O' の平面上に投影し，座標 $(X, Y) = (\ell \cos \alpha, \ell \sin \alpha)$ とする．このようにして得られる球面上の点の平面への投影方法を「**正距方位図法**」という．原点 O からの距離と方向が正確に表わされていることがその特徴である．P と z 軸を含む面と xy 平面の交点を Q とする．直角球面三角形 OPQ において次式が成り立つ．

$$\sin\alpha = \frac{\cos\theta}{\sin\beta}, \quad \cos\alpha = \frac{\sin\theta\sin\phi}{\sin\beta}, \quad \cos\beta = \sin\theta\cos\phi. \tag{1}$$

したがって，

$$X = R\beta\frac{\sin\theta\sin\phi}{\sin\beta},\ Y = R\beta\frac{\cos\theta}{\sin\beta}. \tag{2}$$

ただし，

$$\beta = \cos^{-1}(\sin\theta\cos\phi), \tag{3}$$

である[1]．

図 2 のように，地球の自転軸の傾きを θ_0 とすると，回転軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = (0, -\sin\theta_0, \cos\theta_0), \tag{4}$$

で与えられる．黄道上の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n} = 0, \quad z = R\cos\theta$$

を満たすので

$$-\sin\theta\sin\phi\sin\theta_0 + \cos\theta\cos\theta_0 = 0. \tag{5}$$

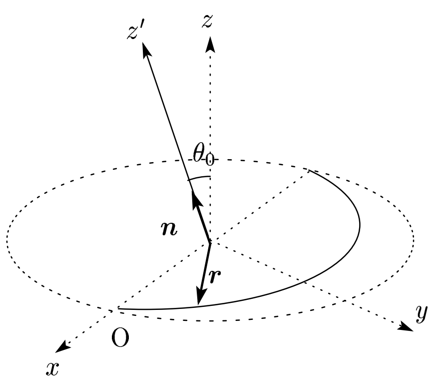

図 2: 黄道の軌跡

[1]付録参照

地球や天球の緯度は$\theta = \pi/2$を起点に測られるので，以下緯度を表す$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$を使用する．黄道上の点$(R, \frac{\pi}{2} - \theta', \phi)$は次式を満たす．

$$\tan\theta' = \tan\theta_0 \sin\phi, \quad \text{or} \quad \theta' = \tan^{-1}(\tan\theta_0 \sin\phi). \tag{6}$$

地球や天球において，正距方位図法で円形に表される半球図を，赤道に平行な横方向に2倍に引き伸ばした楕円にして地球や天球全体を表す図法が「**エイトフ図法**」である．楕円の長軸，短軸をそれぞれ，赤道，中央経線とし，長軸の長さ$2\pi R$，短軸の長さπRとする．天球上における黄道星座の概略位置をエイトフ図法でプロットしたものを図3に示す．表1は理科年表による各星座の概略位置のデータである．図中の実線軌道は黄道である．

表 1: 黄道星座 (12 宮) の概略位置　(理科年表 天 28)

星座名	略符	学名	赤経 h　m	赤緯 °
射手	Sgr	Sagittarius	19　0	-25
魚	Psc	Pisces	0　20	10
牡牛	Tau	Taurus	4　30	18
乙女	Vir	Virgo	13　20	-2
牡羊	Ari	Aries	2　30	20
蟹	Cnc	Cancer	8　30	20
蠍	Sco	Scorpius	16　20	-26
獅子	Leo	Leo	10　30	15
天秤	Lib	Libra	15　10	-14
双子	Gem	Gemini	7　0	22
水瓶	Aqr	Aquarius	22　20	-13
山羊	Cap	Capricornus	20　50	-20

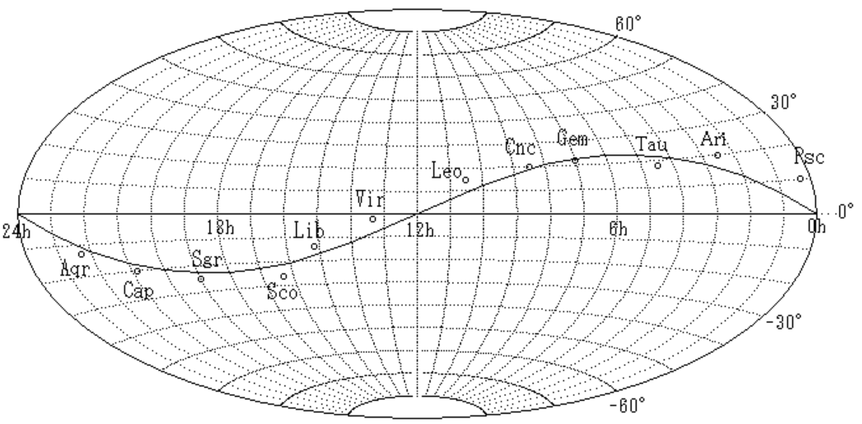

図 3: エイトフ図法による黄道星座の概略位置

2 エイトフ図法による日本地図の原点移動の影響

図 4 のように，原点が球面上の点 $\mathrm{O}(R, \frac{\pi}{2}, 0)$ から球面上の O'(R, θ_0, ϕ_0) に移動したとき，球面上の点 $\mathrm{P}(R, \theta, \phi)$ の座標表現がどのように変換されるかを考える．z 軸の周りに ϕ_0 回転した後，新しい y 軸の周りに $-\theta_0'(=\theta_0 - \frac{\pi}{2})$ 回転すると原点の位置が O' に移動する．変換前の各座標軸の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，変換後のそれらを $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ とすると，

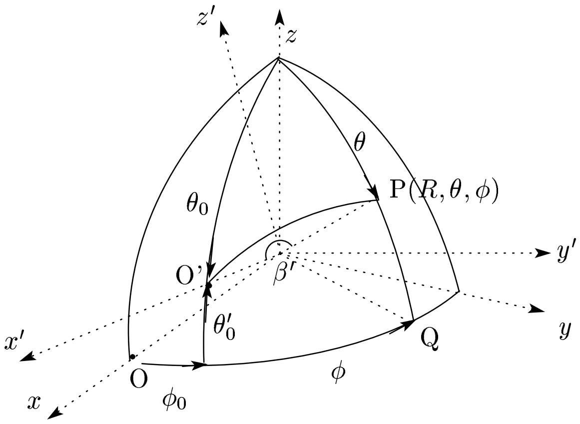

図 4: 原点移動

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0' & 0 & \sin\theta_0' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_0' & 0 & \cos\theta_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_0 & \sin\phi_0 & 0 \\ -\sin\phi_0 & \cos\phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

で与えられる．したがって，変換後の P の極座標表現を (R, Θ, Φ) とすると，

$$\sin\Theta\cos\Phi = \cos\theta_0'\sin\theta\cos(\phi - \phi_0) + \sin\theta_0'\cos\theta, \tag{8}$$

$$\sin\Theta\sin\Phi = \sin\theta\sin(\phi - \phi_0), \tag{9}$$

$$\cos\Theta = -\sin\theta_0'\sin\theta\cos(\phi - \phi_0) + \cos\theta_0'\cos\theta. \tag{10}$$

θ を緯度 θ' であらわすと，投影面での (2),(3) は次式に変形される．

$$X = R\beta'\frac{\sin\Theta\sin\Phi}{\sin\beta'} = R\beta'\frac{\cos\theta'\sin(\phi - \phi_0)}{\sin\beta'}, \tag{11}$$

$$Y = R\beta'\frac{\cos\Theta}{\sin\beta'} = R\beta'\frac{\{-\sin\theta_0'\cos\theta'\cos(\phi - \phi_0) + \cos\theta_0'\sin\theta'\}}{\sin\beta'}, \tag{12}$$

$$\beta' = \cos^{-1}(\sin\Theta\cos\Phi) = \cos^{-1}(\cos\theta_0'\cos\theta'\cos(\phi - \phi_0) + \sin\theta_0'\sin\theta'). \tag{13}$$

図 5 は原点を $(\theta_0', \phi_0) = (0, 0)$ 即ち，緯度 0 °経度 0 °にしたときに得られる日本地図である．図 6 は原点を日本の中心地点の長野あたり，北緯 36 °東経 138 °にして描かれたものである[2]．

[2]日本の海岸線は http://homepage3.nifty.com/Nowral/05_USGS-CL/05_USGS-CL.html に公開されているデータを使用した．

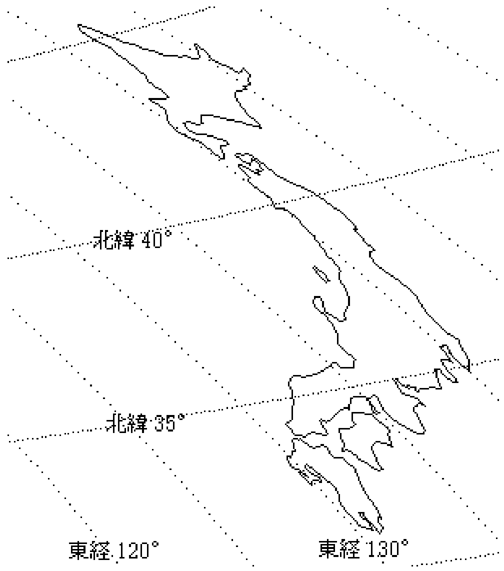

図 5: 原点が緯度 0 °経度 0 °での日本地図

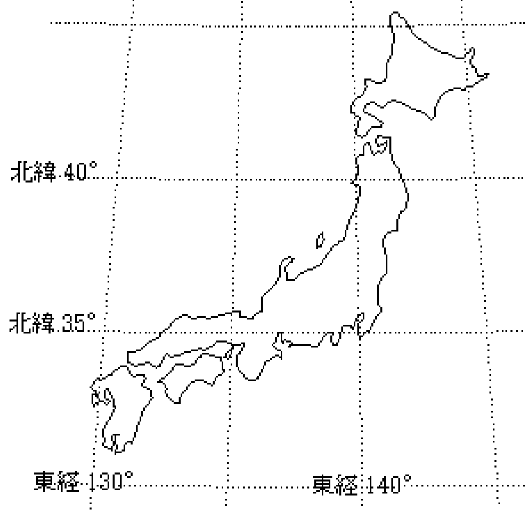

図 6: 原点が北緯 36 °東経 138 °での日本地図

球面三角法

図 7 に示すように，中心 O，半径 1 の球面上の 3 点 A,B,C とし，これらを大円で結ぶと**球面三角形** ABC が得られる．ここで，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，$\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$と$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ のなす角度をそれぞれ α, β, γ とする．また，球面三角形 ABC において $\angle \mathrm{A} = \theta$ とすると

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|\cos\theta = \sin\gamma\sin\beta\cos\theta. \quad (14)$$

上式の左辺における積を変形すると

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\}\cdot\boldsymbol{a} \\
&= \{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}\}\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \\
&\therefore \quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = \cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta \quad (15)
\end{aligned}$$

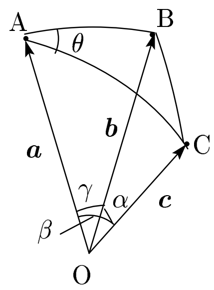

図 7: 球面三角形

したがって，

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}. \quad (16)$$

特に $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき，

$$\alpha = \cos^{-1}(\cos\beta\cos\gamma). \quad (17)$$