

## 1. introduction

図1に示すように惑星Aは太陽Sを焦点にし、長径 $a$ 、離心率 $e$ の楕円軌道を移動する。太陽Sは楕円の中心Oから $ea$ だけ離れている。各惑星は地球が移動する面より $\delta$ 傾斜している。惑星の公転周期 $T$ 、軌道長半径<sup>1</sup>、軌道楕円の離心率および軌道傾斜角は表1のごとく<sup>2</sup>である。

表 1: 主な惑星軌道の諸量

惑星	水星	金星	地球	火星	木星	土星
公転周期 $T$ (year)	0.24085	0.61521	1.00004	1.88089	11.8622	29.4578
軌道長半径 $a$	0.3871	0.7233	1.0000	1.5237	5.2026	9.5549
離心率 $e$	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934	0.0485	0.0555
傾斜角 $\delta$ (°)	7.005	3.395	0.001	1.849	1.303	2.489

地球から見た惑星の軌跡の特徴を調べるため軌道が円であるとしよう。滅多にない事だけれど最初、太陽と各惑星が一直線に並んだ状態からの移動を考えよう。各惑星は50日目には図2の位置にいるであろう。地球から見た各惑星の位置は図3に示されている。地球から見て、各惑星と太陽が330日目までに描く軌跡を図4に示している。太陽以外は複雑な軌道であることがわかる。

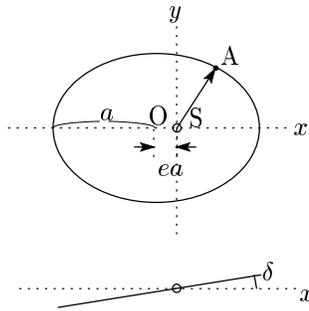


図 1: 惑星の楕円軌道

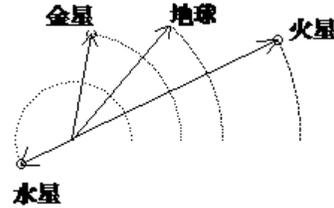


図 2: 太陽を中心にした惑星の運動



図 3: 地球から見た惑星の位置

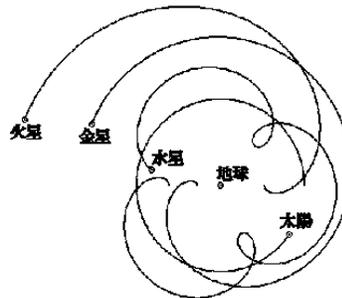


図 4: 地球から見た惑星と太陽の軌道

<sup>1</sup>地球軌道の長半径を単位とする。

<sup>2</sup>理科年表 2007年版 丸善 kk

## 2. Kepler's law

次に、我々が地球上で実際に惑星を観察する場合の正確な状況を設定してみよう。第1に惑星の軌道が楕円であること（ケプラーの第1法則）、第2に惑星の軌道面は地球の公転面から傾斜していること、第3に地球の自転軸は公転軸から  $\theta = 23.44^\circ$  傾斜していることを考慮しなければならない。

太陽を原点にした惑星の位置を極座標  $(r, \phi)$  で表すとラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{GmM}{r} \quad (1)$$

$m$  は惑星の質量、 $M$  は太陽の質量、 $G$  は万有引力定数である。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \text{ より } \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\phi}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \text{ より } m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{GmM}{r^2} = 0 \quad (3)$$

面積速度を  $A$  とすると (2) 式からケプラーの第2法則

$$A = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \text{一定} \quad (4)$$

が得られる。(3) 式は (4) 式を考慮すると

$$m\ddot{r} - \frac{4mA^2}{r^3} + \frac{GmM}{r^2} = 0 \quad (5)$$

が得られる。(3) 式の両辺に  $\dot{r}$  を乗じると次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{2mA^2}{r^2} - \frac{GmM}{r} \right) = 0 \quad (6)$$

(6) 式よりエネルギー保存則を得る。

$$\frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{2mA^2}{r^2} - \frac{GmM}{r} = E = \text{一定} \quad (7)$$

$r$  の時間変化率は保存量  $A, E$  によって次式で与えられる。

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{4A^2}{r^2}}. \quad (8)$$

符号  $\pm$  は平方根の中が0になる  $r$  の値の前後において異符号になるように選ばばよい。(4) 式より

$\dot{\phi} = \frac{2A}{r^2}$  であることから次の微分方程式が得られる。

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \pm \frac{r^2}{2A} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{4A^2}{r^2}}. \quad (9)$$

(9) を解くために変数変換  $u = \frac{1}{r}$  をすると

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = \pm \sqrt{-u^2 + \frac{GM}{2A^2} u + \frac{E}{2mA^2}}. \quad (10)$$

積分を行うと軌道の式を次のように得られる<sup>3</sup>。

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \phi}, \quad \ell = \frac{2}{\alpha + \beta}, \quad e = \frac{|\alpha - \beta|}{\alpha + \beta}. \quad (11)$$

<sup>3</sup> 数学公式集 森口繁一等 岩波全書 p.102  $\int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)}} = \sin^{-1} \frac{2x-a-b}{b-a}$ .

ここに,  $\alpha, \beta$  は (10) 式において平方根の中を 0 と置いたときの  $u$  の 2 根である. (11) 式は円錐曲線の極座標表示である.  $e$  は離心率,  $\ell$  は根と係数の関係から次式を得る.

$$\alpha + \beta = \frac{GM}{2A^2}, \quad \alpha\beta = -\frac{E}{2mA^2}, \quad (\alpha - \beta)^2 = \frac{G^2M^2}{4A^4} + \frac{2E}{mA^2}. \quad (12)$$

軌道が楕円である条件は  $E < 0$  である<sup>4</sup>. 焦点の位置に太陽があり,  $\phi = 0$  において近日点で  $r = \ell/(1+e)$ ,  $\phi = \pi$  で遠日点で  $r = \ell/(1-e)$  である. したがって, 軌道の長半径  $a$  とすると

$$a = \frac{\ell}{2} \left( \frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e} \right) = \frac{1}{\alpha + \beta} \frac{2}{1-e^2} = \frac{GMm}{2|E|}, \quad (13)$$

である. 短い方の半径は  $b = a\sqrt{1-e^2}$  で与えられるので楕円の面積は  $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$  である. したがって, 周期  $T$  は

$$T = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{A} = 2\pi a^2 \frac{\sqrt{2|E|}}{GM\sqrt{m}}.$$

然るに (13) より  $\frac{2|E|}{m} = \frac{GM}{a}$  であるから

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}. \quad (14)$$

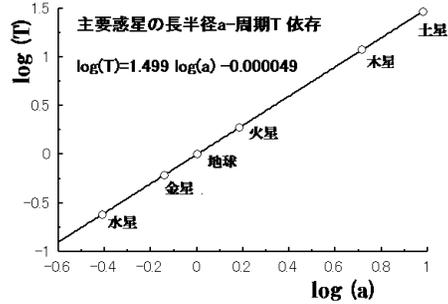


図 5: 主な惑星の  $a$ - $T$  依存

$GM$  は惑星に独立な量であるので惑星の周期は軌道長半径のみに依存する. これがケプラーの第 3 法則である. 図 5 は表 1 のデータによって  $a$  に対する  $T$  を両対数グラフで描き, 最小 2 乗法で関数フィットしたものである.  $T \propto a^{1.5}$  であることがわかる.

### 3. Kepler's equation

変数変換  $r = a(1 - e \cos \psi)$  をおこなうと,  $dr = ae \sin \psi d\psi$  であるから, (8) 式より

$$dt = \sqrt{\frac{a}{GM}} \frac{r dr}{\sqrt{(\alpha - r)(r - \beta)}} = \sqrt{\frac{a}{GM}} \frac{a^2 e (1 - e \cos \psi) \sin \psi d\psi}{ae \sqrt{(1 + \cos \psi)(1 - \cos \psi)}}$$

(14) 式を考慮すると

$$dt = \frac{T}{2\pi} (1 - e \cos \psi) d\psi. \quad (15)$$

$t = 0$  のとき  $r = a(1 - e)$  即ち  $\psi = 0$  であるから

$$t = \frac{T}{2\pi} (\psi - e \sin \psi). \quad (16)$$

この式をケプラーの方程式という.

<sup>4</sup>  $0 < e < 1$  では楕円,  $e = 1$  では放物線,  $e > 1$  では双曲線である.

#### 4. solution of Kepler's equation

ケプラーの方程式 (16) を  $\psi$  を  $t$  の関数として得るのは困難であるのでニュートン法で数値的に解いてみよう．次の関数  $F(\psi, t)$  とその微分  $F'(\psi, t)$  を定義しよう．

$$F(\psi, t) = \frac{T}{2\pi}(\psi - e \sin \psi) - t, \quad F'(\psi) = \frac{\partial F}{\partial \psi} = \frac{T}{2\pi}(1 - e \cos \psi)$$

$e$  が 1 に比して小さいので第 0 近似  $\psi_0 = 2\pi \frac{t}{T}$  とする．第  $n+1$  次近似は

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \frac{F(\psi_n, t)}{F'(\psi_n)} \quad (17)$$

近似を続ければ  $\psi(t)$  が得られる．離心率が大きい水星の場合 ( $e = 0.2$ ) について，近似の収束性を検討してみよう．各時刻での近似を表 2 に示す．第 2 次近似ですでに収束していることがわかる．

表 2:  $\psi$  の収束性

$k$	$k/20$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$
1	.05	0.31416	0.39048	0.39024	0.39024
2	.10	0.62832	0.76857	0.76713	0.76713
3	.15	0.94248	1.12584	1.12274	1.12274
4	.20	1.25664	1.45938	1.45531	1.45530
5	.25	1.57080	1.77080	1.76696	1.76696
6	.30	1.88496	2.06410	2.06137	2.06137
7	.35	2.19912	2.34390	2.34246	2.34246
8	.40	2.51327	2.61446	2.61397	2.61397

軌道の式

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \phi}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{a(1 - e \cos \psi)}. \quad (18)$$

より  $u = \tan \frac{\phi}{2}$ ,  $v = \tan \frac{\psi}{2}$ ,  $\cos \phi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$  および

$$\cos \psi = \frac{1 - v^2}{1 + v^2} \text{ を (18) 式に代入すると}$$

$$\left(1 + e \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right) \left(1 - e \frac{1 - v^2}{1 + v^2}\right) = 1 - e^2$$

$$\{1 + u^2 + e(1 - u^2)\} \{1 + v^2 - e(1 - v^2)\} = (1 - e^2)(1 + u^2)(1 + v^2)$$

$$(1 - e)^2 u^2 + (1 + e)^2 v^2 = (1 - e^2)u^2 + (1 - e^2)v^2$$

$$u = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} v, \text{ すなわち}$$

$$\phi = 2 \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\psi}{2} \right\}. \quad (19)$$

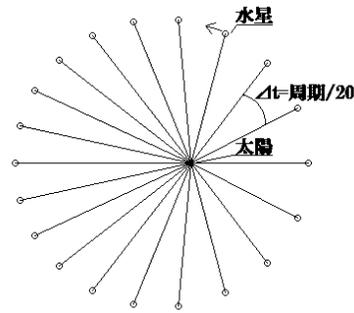


図 6: 水星の楕円軌道

(18), (19) を使って  $r, \psi$  の値を計算し,  $t = (k/20)T$  ( $k = 1, \dots, 20$ ) に対する  $(r \cos \phi, r \sin \phi)$  を図 6 にプロットしている. 移動角度をわかりやすくするために各時刻における動径を付加した.

### 5. Transformation of coordinate systems

太陽を原点にしたときの地球および惑星の位置を  $r_e, r$  とすると地球からの惑星の位置は

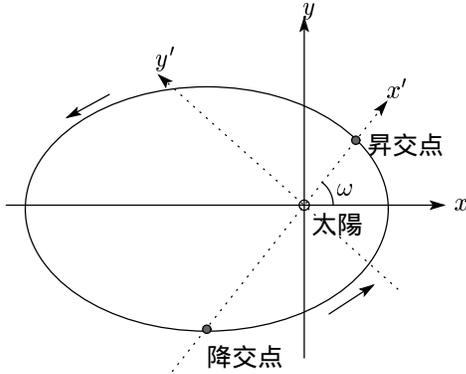


図 7: 昇交点と降交点の位置

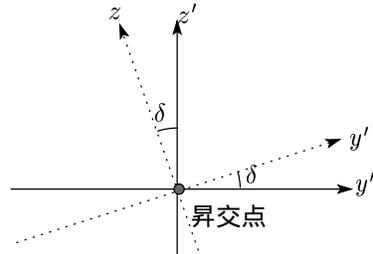


図 8: 軌道面の傾斜

$R = r - r_e$  である. 黄道面<sup>5</sup>と惑星の軌道が交差する 2 点 (昇交点と降交点) を結ぶ直線上, 太陽から昇交点の方向に  $x'$  軸をとり黄道面に垂直に  $z'$  軸,  $y'$  軸を  $z'$ ,  $x'$  軸に垂直にとる. 図 7 のように近日点を通る  $x$  軸と  $x'$  軸とのなす角を  $\omega$  とする. 惑星の軌道面と黄道面の傾斜角度を  $\delta$  とすると図 8 のように黄道面に固定した座標  $(x', y'', z')$  は次式で与えられる.

$$\begin{cases} x' = x \cos \omega + y \sin \omega = r \cos(\phi - \omega) \\ y'' = y' \cos \delta = -x \sin \omega \cos \delta + y \cos \omega \cos \delta = r \sin(\phi - \omega) \cos \delta \\ z' = y' \sin \delta = -x \sin \omega \sin \delta + y \cos \omega \sin \delta = r \sin(\phi - \omega) \sin \delta \end{cases} \quad (20)$$

地球に関する各諸量を ' を付けて表すと  $r' = \frac{l'}{1 + e' \cos \phi'}$  である. 地球の近日点から測られた  $x'$  軸までの角度を  $\omega'$  とすると, 地球の位置は  $r_e(x_e, y_e, z_e) = (r' \cos(\phi' - \omega'), r' \sin(\phi' - \omega'), 0)$  である. したがって, 地球から見た惑星の位置  $R(X, Y, Z)$  は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} X(\phi, \phi') &= \frac{l \cos(\phi - \omega)}{1 + e \cos \phi} - \frac{l' \cos(\phi' - \omega')}{1 + e' \cos \phi'} \\ Y(\phi, \phi') &= \frac{l \sin(\phi - \omega)}{1 + e \cos \phi} \cos \delta - \frac{l' \sin(\phi' - \omega')}{1 + e' \cos \phi'} \\ Z(\phi) &= \frac{l \sin(\phi - \omega)}{1 + e \cos \phi} \sin \delta \end{aligned}$$

$\phi, \phi'$  は同時刻における惑星および地球の角度変位をそれぞれの近日点から測った値である.

次に地球が公転軸に対して  $\alpha$  だけ傾いた軸の周りに角速度  $w$  で自転していることを考慮しよう. 公転軸の方向の単位ベクトルを  $k$ , 公転面内の互いに直交する単位ベクトルを  $i, j$  とする. まず, 図 9 の左図のように  $j$  の周りに  $\alpha$  回転すると  $j$  は変わらないが,  $k, i$  は次の  $k', i'$  に移る.

$$j' = j, \quad k' = k \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad i' = -k \sin \alpha + i \cos \alpha \quad (21)$$

<sup>5</sup>地球の公転軌道面

あるいは

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (22)$$

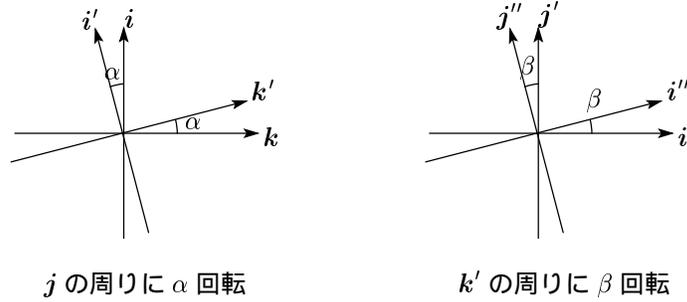


図 9: 公転系から自転系への座標軸の変換

ある時刻  $t$  での自転の回転角は

$$\beta = \omega t + \beta_0 \quad (23)$$

である.  $k'$  の周りに  $\beta$  回転して得られる単位ベクトル  $i'', j'', k''$  は図 9 の右図を参照すると次式で与えられることがわかる.

$$k'' = k', \quad i'' = i' \cos \beta + j' \sin \beta, \quad j'' = -i' \sin \beta + j' \cos \beta \quad (24)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} i'' \\ j'' \\ k'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} \quad (25)$$

したがって

$$\begin{pmatrix} i'' \\ j'' \\ k'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$X'i'' + Y'j'' + Z'k'' = Xi + Yj + Zk$$

より, 地球から観測される惑星の位置  $R(X', Y', Z')$  は次式で与えられる.

$$\begin{cases} X' = X \cos \alpha \cos \beta + Y \sin \beta - Z \sin \alpha \cos \beta \\ Y' = -X \cos \alpha \sin \beta + Y \cos \beta + Z \sin \alpha \sin \beta \\ Z' = X \sin \alpha + Z \cos \alpha \end{cases} \quad (27)$$