物理学Ⅰ問題集

近畿大学理工学部物理学検討委員会編

平成17年度版

はしがき

　物理学は、思考実験により少数の原理から、測定可能な操作的概念を作り上げ、概念から作られた機械を操作することによって、考察対象の性質を明らかにする学問です。世界を少数の原理から理解しようとする物理学は、世界の多様性を追求する化学や生物学と、互いに助け合い補い合いながら、科学技術社会で生じる様々な問題を解決する方法を提供します。

　講義では、物理学の歴史のなかで、最初に考えられた質点の古典力学を取り上げ、典型的な例題の解法を通して、問題への物理学に特有な取り組み方を示します。

　初学者にとっての物理学学習の難しさは、現実の複雑性を捨象して、理解しがたい抽象概念を作ることに対する、精神的な障壁を取り払えないことにあります。講義では、物理学としての全学科共通の例題を取り上げますが、個々の例題の取り扱い方は、この障壁を乗り越えるために、各担当教員毎に、それぞれ、特徴のあるものとなります。

–到達目標–

質点の力学の典型的な問題を解く力を獲得する。

問題の背後にある原理を分析し、明確な理論を使って、解を表現する能力を身に付ける。

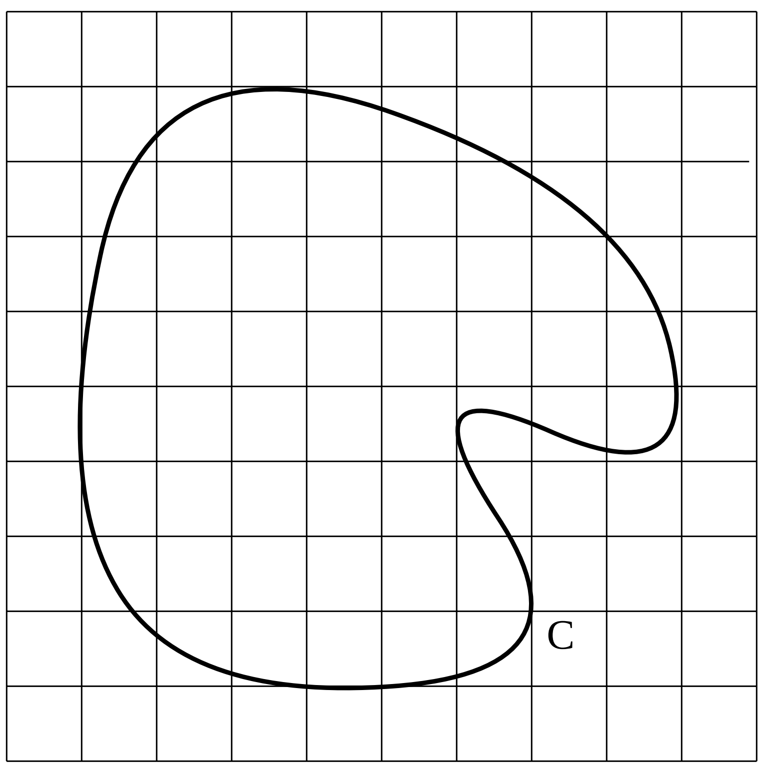
第1章　時間・空間・物質

時間や距離の測り方にについて学ぶ。量の取り扱い方と単位および単位系について学ぶ。次元解析を用いた物理量の大きさのおおよその評価法について学ぶ。

1.1　量の測定

注
単位は小文字の立体で記され, 数値と単位の間には小さな空白を入れなければならない。たとえば $1cm$ の表記は誤りである。

[**例題**] **1.1**
曲線 C で囲まれた面の面積を求めよ。ただし、図中の直線は 1 cm 間隔で引かれている。

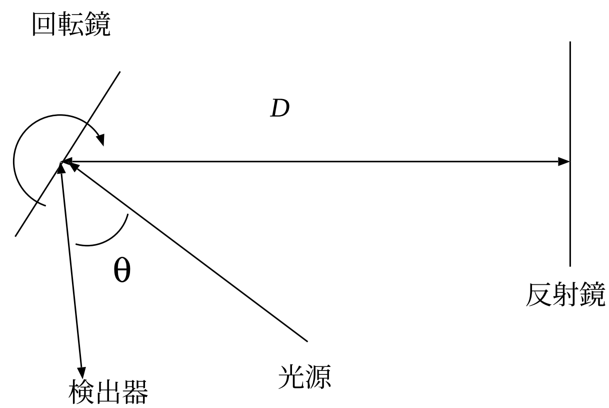


[**解**] 曲線の内部には一辺 1 cm のタイルが 29 個入っている。したがって求める面積 S は 29 cm^2 より大きい。曲線がタイルを横切っている一辺 1 cm のタイルは 25 個ある。したがって, 面積 S は 54 cm^2 を越えることはない。

タイルを小さくすると面積測定の精度は上がる。タイルを 4 分割し, 一辺の長さを 0.5 cm とすると、$24 \times 4 + 31$ 個のタイルが曲線で囲まれた図形の中に入り, 52 個のタイルを曲線が横切る。したがって S は 31.75 cm^2 より大きく, 44.75 cm^2 より小さい。したがって $S = 38.25 \pm 6.50\,\mathrm{cm}^2$ である。

問 1.1 (基本)
α Cen という星は年周視差が 0.760 秒である。この星までの距離を求めよ。ただし、年周視差とは地球と太陽から見た方向の差であり、角度 1 度は 60 分、1 分は 60 秒である。

問 1.2
実験装置を図のように配置する。光源から毎分 27000 回転する鏡に光をあて、反射鏡を使って光を戻したところ, 光源から角度 $\theta = 30°$ の所で反射光を観測した。回転鏡と反射鏡の間の距離 D を求めよ。



注
数値と角度の単位 ° の間に空白を入れてはならない。SI では角度は無次元量なので単位はつけない。補助単位として rad の単位をつけてもよいことは SI の例外規定である。また, °, ′, ″ の単位を使ってもよいことや, 空白を入れないことは SI の例外規定である。

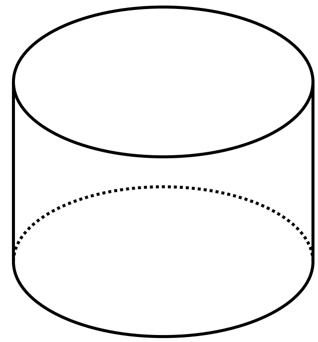
1.2 比と割算

[例題] 1.2
図のような円筒状容器 C がある。第 2 の容器 D は C と同じ形だが、大きさは 3 次元すべての方向で 1.80 倍されている。適当なスケーリングの比率だけを使って、以下の問題に答えよ。

(a) 容器 D の周 C_{D} を容器 C の周 C_{C} と比べよ。比 $C_{\mathrm{D}}/C_{\mathrm{C}}$ の数値はいくらか。

(b) 容器 D の底面積 S_{D} は容器 C の底面積 S_{C} の何倍か？

(c) もし容器 C に満杯で 25 L の水が入るなら、容器 D には何リットルの水が入るか？



注
SI 単位系の単位は小文字の立体で記される。容積の単位としてリットルを使ってよいこと，また，単位を大文字で L と表記するのは SI の例外規定である。

[**解**] (a) 周の長さは周が曲線であっても，長さの比で変わる。したがって

$$\frac{C_{\mathrm{D}}}{C_{\mathrm{C}}} = 1.80.$$

(b) 面積は長さの 2 乗に比例して変化する。したがって

$$\frac{S_{\mathrm{D}}}{S_{\mathrm{C}}} = 1.80^2 = 3.24.$$

(c) 容積は長さの 3 乗に比例して変化する。したがって容器 D には

$$25\,\mathrm{L} \times 1.80^3 = 145.8\,\mathrm{L}$$

の水が入る。

問 1.3
食塩 176 g を 5.00 L の水容媒に解かして食塩溶液を作る。

(a) 溶液の濃度を求め、なぜそうなるかと考えたかを手短に述べよ。

(b) (a) の結果を使って、10 g の食塩を摂取するには何立方センチメートルの溶液を取らなければならないかを計算し、なぜそう考えたかを手短に述べよ。

(c) 密度の概念を使って、推論過程が厳密に (a), (b) に対応する問題文を作成せよ。作成した問題文の物理状況に対応する適切な数値を選べ。問題の解答を与え、推論の各段を簡単に説明せよ。

(d) 縦軸を食塩の質量、横軸を容媒の体積とするグラフを描くことによって (b) の問題を解け。

問 1.4 (基本)
騎馬に乗った人物の彫像のレプリカを作る。レプリカの全体積はオリジナルの 0.51 倍の体積である。

(a) レプリカの人物の腕の長さは、オリジナルの腕の長さの何倍か?

(b) レプリカの表面積は、オリジナルと比べて何倍になるか?

問 1.5 (基本)
地球の赤道の円周は 4 万キロメートルである。地球の赤道が完全に滑らかであるとして、赤道にロープを巻き付けて円を作ったとする。このロープに 60 cm のロープを継ぎ足して新たに円を作る。ロープは地球表面からどれくらい浮き上がるか?

問 1.6 (基本)
糸に付けられたおもりが水平面内を等速円運動している。おもりの接線速度 v_{t} を 2.35 倍し, 円の半径 r を 1.76 倍したとせよ。おもりの質量は 145 g のままとする。

このように変更した後の遠心力 F_{cf} は, 変更前の遠心力 F_{ci} の何倍になるか? 推論の記述にあたり, たとえば, 面積の因子は長さの因子の平方で変化するといった関数的な考察を行え。ここで現れる数値は比であり, 速度や半径そのものではないので, 諸君の知っている公式に, 直接, 数値を代入してはいけない。

1.3 次元解析

[例題] 1.3
振子の周期 T が錘の質量 m, 糸の長さ ℓ, および重力の加速度 g に関係して定まることから, T を次元解析によって見いだせ。

[解] 振り子の振動を特徴づける無次元量は振動の振幅 θ である。したがって, 振り子の周期 T を与える公式は

$$T = f(\theta) m^x \ell^y g^z$$

と書ける。ここで $f(\theta)$ は無次元量から決まる大きさが 1 程度の量であるが, それは次元解析の手法からは決まらない。

長さの次元を L, 時間の次元を T, 質量の次元を M と書くと、公式の左辺は $\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^1$ の次元を持つ。また右辺は $\mathrm{M}^x\mathrm{L}^y(\mathrm{L}/\mathrm{T}^2)^z = \mathrm{M}^x\mathrm{L}^{y+z}\mathrm{T}^{-2z}$ の次元を持つ。両辺の次元は同じでなければならないから

$$x = 0, \quad y + z = 0, \quad -2z = 1$$

つまり

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = -\frac{1}{2}.$$

したがって, 1 程度の大きさの因子をのぞいて

$$T \simeq \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

である。

問 1.7 (基本)
密度 $\rho = 1.3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, 圧力 $p = 10^3\,\mathrm{hPa}$ の大気中を伝わる音速 c_s のおおよその大きさを評価せよ。

問 1.8 (基本)
水の波の速さ v は，比較的浅いところでは，深さ h と重力の加速度 g によって定まることが知られている。v は h と g にどう関係するか。

問 1.9
密度 ρ の大気中の一点でエネルギー E を解放し，爆発を起させる。解放されたエネルギーは爆発の衝撃面内に一様に閉じ込められているという仮定のもとで，衝撃面の半径が r のときの衝撃面の走る速度を求めよ。

1.4 単位と単位系

[例題] 1.4
万有引力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}}$ を，質量を太陽質量 $1\,\mathrm{M}_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, 長さを地球太陽間距離 $1\,\mathrm{AU} = 1.50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, 時間を年で測るといくらになるか？

[解] 単位の変換は次のようにして行うことができる。

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}} \\ &= 6.67 \times 10^{-11}\left(\frac{1\,\mathrm{M}_\odot}{1.99 \times 10^{30}}\right)^{-1}\left(\frac{1\,\mathrm{AU}}{1.50 \times 10^{11}}\right)^3\left(\frac{1\,\mathrm{y}}{3.17 \times 10^7}\right)^{-2} \\ &= 39.5\,\mathrm{M}_\odot^{-1}\,\mathrm{AU}^3\,\mathrm{y}^{-2}. \end{aligned}$$

問 1.10 (基本)
太陽の光が地上に直接に達するなら、地上で太陽に正対する単位面積が単位時間あたり受ける太陽エネルギーは $1.37\,\mathrm{kW\,m^{-2}}$ である。地球全体で 1 日あたり受け取る太陽エネルギーはどれだけあるか?

問 1.11 (基本)
国際単位系 (SI) では、基本単位の中の長さ、質量、時間の単位として、それぞれ、 m (メートル)、kg (キログラム)、s (秒) を用いる。すべての物理量はこれらの単位の組合せで表すことができる。例えば、速度は m/s である。つぎの物理量を m、kg、s の組み合わせで表せ。

(1) 加速度、 力、 エネルギーおよび運動量。

(2) 角速度 (角振動数), 角運動量。

(3) 万有引力定数。

(4) フックの法則に現れるばね定数。

注
ここでは未だ学んでいない物理量が多く挙げられているが、考え方が非常に重要なので、敢えて、問題として提出している。これ以後、新しい物理量が出て来た時、必ずその単位を検討する習慣をつけていただきたい。

1.5　三角比

[例題] 1.5
遠方に高さ 1200 m の山が見える。腕を伸ばして手を横にして指で山を隠した所、中指と人差指を合わせた幅に隠れた。その山までの距離を求めよ。

[解] 腕の長さは約 60 cm, 中指と人指し指を合わせた太さは約 3 cm である。各自、自分の大きさを測り、記憶しておけ。指を見込む角度は $\theta = \frac{3\,\mathrm{cm}}{60\,\mathrm{cm}}$ である。山までの距離を d、山の高さを h とすると

$$d \simeq \frac{h}{\theta} = \frac{1200\,\mathrm{m}}{\frac{3}{60}} = 24\,\mathrm{km}.$$

問 1.12
角度 θ の大きさが小さい時, 近似式

$$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$$

が成り立つ。公式 $\sin\theta \simeq \theta$ を誤差 1% 以下使いたい。卓上計算機を使って、この公式が使える θ の範囲を求めよ。度を単位とすると、何度まで使えるか?

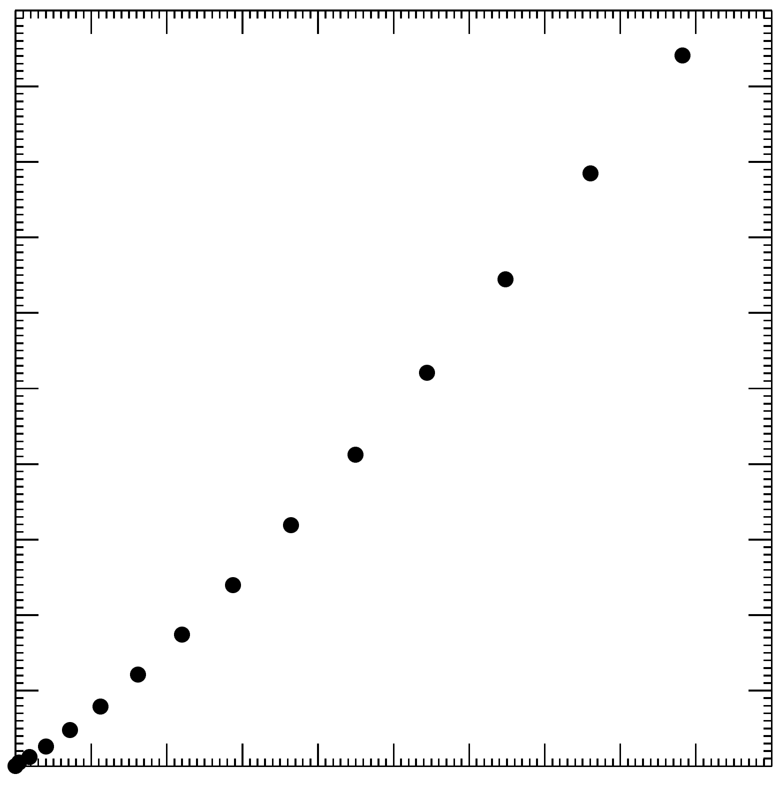
注
角度 θ は無次元量であるので、数として大小が比較でき、数学公式の中に入ることができる。次元の異なる量は比較できない。1 kg と 3 m はどちらが大きいか考えてみよ。

第2章　微分の考え方

速度、加速度と微分の考え方について学ぶ。等速度円運動と三角関数について学ぶ。

2.1　速度・加速度

[例題] 2.1
次の図は0.1秒毎に露光することによって写した物体の運動のストロボ写真である。物体は左下から右上へ動いている。各瞬間の速度, 加速度を求めよ。ただし, 物差しの目盛は 1 mm を単位としている。

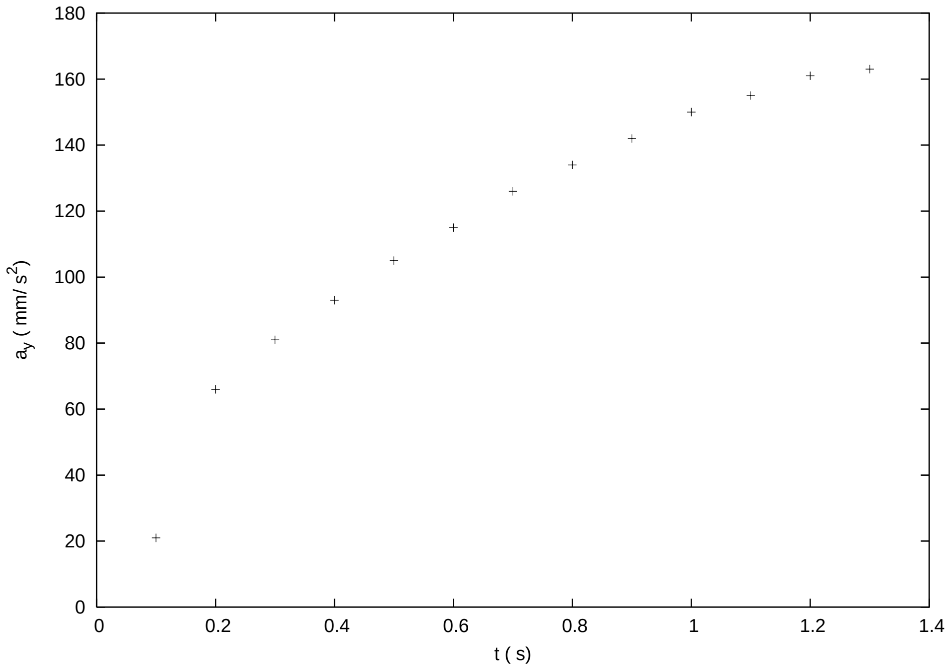


[解]　次の表の第1列は時計の読みで単位は s, 第2列は x 座標の読みで

単位は mm, 第 3 列は y 座標の読みで単位は mm である。第 4 列は第 2 列の隣り合う数値の差で単位は mm で速度の x 成分はこの値を測定時間間隔 0.1 s で割れば単位を mm/s として求まる. 第 5 列は第 4 列の隣り合う数の差で単位は mm で, 加速度の x 成分はこの数値を $(0.1\,\mathrm{s})^2$ で割れば単位を $\mathrm{mm/\,s^2}$ として求まる。第 6 列は第 3 列の隣り合う数値の差で単位は mm で速度の y 成分はこの値を測定時間間隔 0.1 s で割れば単位を mm/s として求まる. 第 7 列は第 6 列の隣り合う数の差で単位は mm で, 加速度の y 成分はこの数値を $(0.1\,\mathrm{s})^2$ で割れば単位を $\mathrm{mm/\,s^2}$ として求まる。

t	x	y	Δx	$\Delta(\Delta x)$	Δy	$\Delta(\Delta y)$
0.0	0.00	0.00				
			0.45		0.51	
0.1	0.45	0.51		0.90		0.21
			1.35		0.72	
0.2	1.80	1.23		0.90		0.66
			2.25		1.38	
0.3	4.05	2.61		0.90		0.81
			3.15		2.19	
0.4	7.20	4.80		0.90		0.93
			4.05		3.12	
0.5	11.25	7.92		0.90		1.05
			4.95		4.17	
0.6	16.20	12.09		0.90		1.15
			5.85		5.32	
0.7	22.05	17.41		0.89		1.26
			6.74		6.58	
0.8	28.79	23.99		0.91		1.34
			7.65		7.92	
0.9	36.44	31.91		0.90		1.42
			8.55		9.34	
1.0	44.99	41.25		0.91		1.50
			9.46		10.84	
1.1	54.45	52.09		0.89		1.55
			10.35		12.39	
1.2	64.80	64.48		0.89		1.61
			11.24		14.00	
1.3	76.04	78.48		0.91		1.63
			12.15		15.63	
1.4	88.19	94.11				

加速度の y 成分を時間の関数としてグラフにしてみると次のようになる。加速度の x 成分や, 速度, 位置のグラフも, 各自で, 描いてみよ。



問 2.1 (基本)
自動車 A と自動車 B が同じ直線道路を走行している。

A は時刻 $t = 0.00\,\mathrm{h}$ に $s = 4.0\,\mathrm{km}$ の位置にあり, $60.0\,\mathrm{km/\,h}$ の一定速度を保っている。

自動車 B は時刻 $t = 0.50\,\mathrm{h}$ で $s = 0.0\,\mathrm{km}$ の位置にあり $80.0\,\mathrm{km/\,h}$ の一定速度を保っている。

(1) 自動車 B は自動車 A を何時に追い越すか?

(2) どの位置で追い越すか?

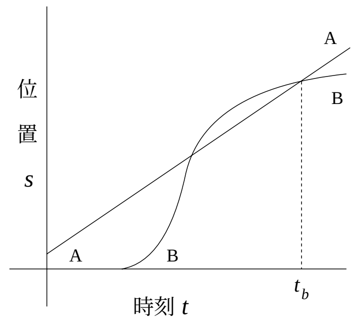
(3) B は $s = 0.0$ にいた時から, どれくらいの時間で A に追い付くか?

(4) A は, 追い越された時, $t = 0.0$ での位置から, どれくらい移動したか?

図上に s の t に対する 2 つのグラフを描き, グラフから必要な数値を読みとることにより, この問題を解け。

また, 時刻 t に対する自動車 A の位置 s_{A} と自動車 B の位置 s_{B} を表す式を書き下すことにより問題を解け。

問 2.2 (基本)
以下の図は平行なトラック上を直線運動する 2 つのボール A と B の直線運動の時刻に対する位置の記録を示している。



(a) ボール B がボール A を追い越す瞬間を図の t 軸にそって記号 t_a で記せ。

(b) 時刻 t_b では, A と B, どちらのボールが速く動いているか?

(c) 2 つのボール A, B が同じ速度で動いている瞬間を t 軸に沿って記号 t_c、t_c'(2 箇所ある) で記せ。

(d) ボール B が

(1) 速度を増している時間区間

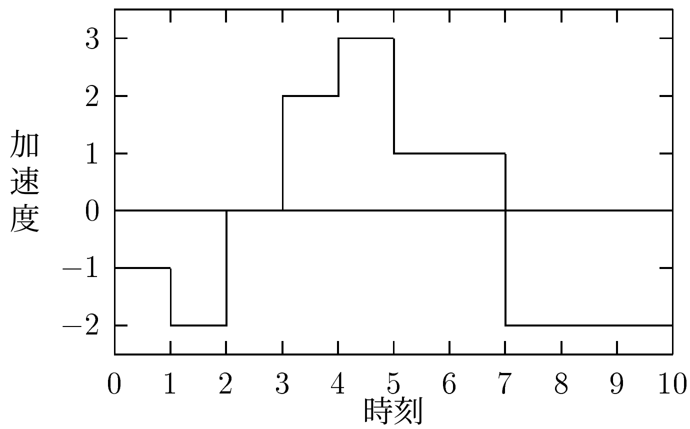
(2) 速度を減じている時間区間

(3) 速度が増加から減少に変わる時刻

を図に示せ。

問 2.3 (基本)
次の図は時計を見ながら加速度を測り，その結果をプロットしたものである。

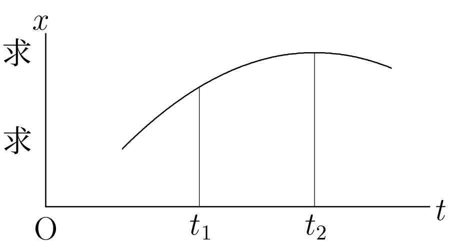
横軸は s を単位とした時刻であり，縦軸は $\mathrm{m/s^2}$ を単位とした加速度である。この図を使って，時計の読みに対して速度をプロットした図を作成せよ。



問 2.4 (基本)
一次元で考える。質点の x 方向の位置が、時刻 t の関数

$$x = at^2 + bt + c$$

で与えられている。



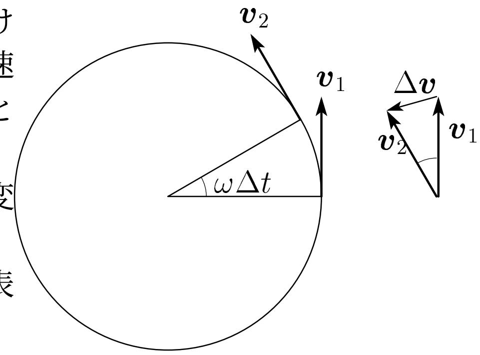
(1) 時刻 t_1 から t_2 の間に進んだ距離 Δx を求めよ。
(2) 時刻 t_1 から t_2 の間の平均の速さ $\langle v \rangle$ を求めよ。
(3) t_2 を t_1 に限りなく近づけたとき、上で求めた $\langle v \rangle$ の値は、$t = t_1$ における微分値 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=t_1}$ に一致することを示せ。

問 2.5 (基本)
A 地点から B 地点を、行きは時速 4 km で、帰りは時速 16 km で往復した。平均の時速はいくらか。

2.2 等速円運動

[例題] 2.2

半径 r の円周上を一定の速度 (大きさ v) で運動している質点 P がある。ある時刻 t における速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_1$、時刻 $t+\Delta t$ における速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とする。また、角速度を ω とする。



(1) 時間 Δt の間に生じた速度ベクトルの変位 $\Delta\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ を用いて表せ。

(2) 変位 $\Delta\boldsymbol{v}$ の大きさを $v, \omega, \Delta t$ を用いて表せ。

(3) P の加速度の大きさとその向きを求めよ。

[解] (1) ベクトルの変位は $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$

(2) 変位の大きさは $|\Delta\boldsymbol{v}| \simeq |\boldsymbol{v}_1|\omega\Delta t = v\omega\Delta t$

(3) 加速度の大きさは $\dfrac{v\omega\Delta t}{\Delta t} = v\omega = r\omega^2\ (= \dfrac{v^2}{r})$

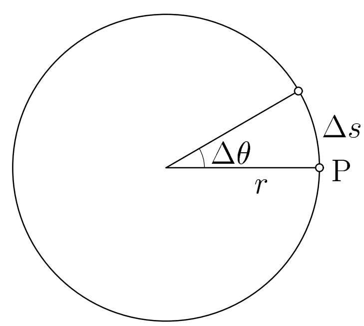
向きは、$\Delta t \to 0$ における変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{v}$ の向きで、回転中心の方向である。

問 2.6 (基本)

a と ω が定数の時, $x = a\sin(\omega t)$, $y = a\cos(\omega t)$ を t で微分しなさい。

問 2.7 (基本)

半径 r の円周上を回転する質点 P がある。P は時刻 t と $t+\Delta t$ の間に、中心角にして $\Delta\theta$ だけ移動した。



(1) P がこの間に移動した円周上の距離 Δs はいくらか。

(2) P の平均速度はいくらか。

(3) 角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ が一定のとき、P の速度 v を求めよ。

第3章　運動の法則

慣性の法則、加速度と慣性質量について学び、運動の法則を抽象する。

注
高校物理では単位系は前もって与えられており，単位を変換することは考えられていない。公式に現れる記号はたんなる数値を表し，公式は数値間の関係を表している。このような考え方は学習するうえで一度は通らなければならない道である。
しかし，**大学では単位変換を自在に行う**ので，記号は数値とともに単位も含んでいると考えたほうがよい．
ここでは、しばらくの間、高校教育にしたがって、記号のあとに括弧で括って単位を入れるが、物理の考え方になれるにしたがって、その記法は止める。したがって m [kg] と書いてある場合，m は単位のない数値であるが、たんに m と書いてある場合は m は数値 $\times$ 単位である。

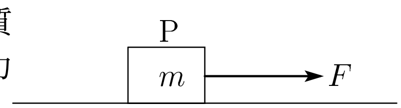
1. ニュートンの運動方程式 (運動の第 2 法則)
力 $\boldsymbol{F}$ を受けて運動する質量 m の物体の加速度を $\boldsymbol{a}$ とするとき、式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ が成り立つ座標系を慣性系という。この式をニュートンの運動方程式という。m を慣性質量ともいう。

2. 慣性の法則 (運動の第 1 法則)
物体に外力が働かないとき、その速度は一定である。

3. 作用 · 反作用の法則 (運動の第 3 法則)
2 物体が接触するとき、互いに働く力の向きは反対で、大きさは等しい。

3.1　運動の法則

[例題] 3.1
図のように、滑らかな水平面上において、質量 m [kg] の物体 P が運動方向に一定の力 $\boldsymbol{F}$ [N] (大きさ F) を受けながら運動している。



(1) P の加速度 $\boldsymbol{a}$ の大きさ a はいくらか。
(2) 時刻 $t = 0$ s で P は静止していたとすると、$t = 1$ s のとき P の速度の大きさ (速さ v) はいくらか。

[解] (1) 物体の運動の時間的発展を記述する運動方程式には、物体に働くすべての力を考えに入れなければならない。さらに、物体の運動を決めるのは、その物体の運動する方向に平行な力の成分であり、それに垂直な成分は運動に寄与しない。これらを考慮して、運動方程

式をたてる。

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \;\rightarrow\; a = \frac{F}{m}\ [\,\mathrm{m/s^2}\,]$$

(2) ある短い時間 Δt の間に、速さが $\Delta\boldsymbol{v}$ だけ変わったとすると、加速度は $\boldsymbol{a} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ と表される。$t = 1$ s のときの P の速さを v [m/s] とすると、

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v-0}{1-0} \;\rightarrow\; v = a\ [\,\mathrm{m/s}\,]$$

前の章で学習した微分記号を用いると、この問題は、時刻 t の関数 v が満たす関係式 $a = \dfrac{dv}{dt}$ を、$t = 0$ のとき $v = 0$ という初期条件で $v = f(t)$ (t の関数) を求めるという数学の問題になる。$dv = a\,dt$ の両辺を積分すると

$$\int_0^v dv = \int_0^t a\,dt \;\rightarrow\; v = at$$

従って、$t = 1$ s では $v = a$ [m/s] となる。

問 3.1 (基本)

滑らかな水平面上において、質量 m [kg] の物体 P が、運動方向に、一定の力 F [N] を受けながら運動している。時刻 $t = 0$ で速さ $v = v_0$ [m/s] のとき、任意の時刻 t における P の速さはいくらか。

問 3.2 (基本)

滑らかな水平面上において、質量 m [kg] の物体 P が、運動方向とは逆向きに、一定の力 F [N] を受けながら運動している。

(1) P の運動方向を正の向きとして、P の加速度の大きさ a と向きを求めよ。

(2) 時刻 $t = 0$ s のとき、P の速さは v_0 [m/s] であった。P の速さが 0 になる時刻 t を求めよ。

問 3.3 (基本)

速さ 90 km/h で走っている質量 $M = 1000$ kg の車がある。急ブレーキ (一定の力) をかけて 6 秒後に静止させた。

(1) 一定の力を F として、運動方程式をたてよ。

(2) 初期条件を求めよ。

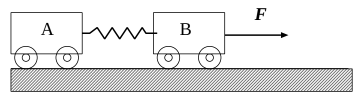
(3) 一定の力 F を求めよ。

[例題] 3.2

図のように水平でなめらかな床の上の台車 A, B を振動がただちに減衰する軽いバネで連結し, 台車 B を $F = 40.0\,\mathrm{N}$ の力で引っぱる。台車 A, B の質量は $m_\mathrm{A} = 10.0\,\mathrm{kg}$, $m_\mathrm{B} = 6.0\,\mathrm{kg}$ とし, バネのバネ定数は $k = 4.00 \times 10^2\,\mathrm{N/\,m}$ とする。

(1) A と B の加速度 $\boldsymbol{a}$ の大きさ a を求めよ。

(2) バネの伸び ℓ を求めよ。



[解] (1) バネが台車 A を引っ張る力を $\boldsymbol{F}_\mathrm{AB}$, 台車 B を引っ張る力を $\boldsymbol{F}_\mathrm{BA}$ とすると

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{AB} + \boldsymbol{F}_\mathrm{BA} = 0.$$

台車 A の水平方向の運動方程式は

$$m_\mathrm{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_\mathrm{AB}$$

台車 B の水平方向の運動方程式は

$$m_\mathrm{B}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{BA}$$

だから

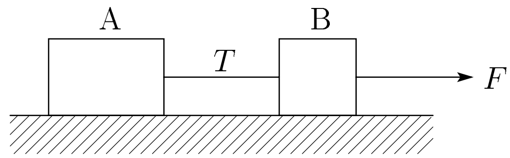
$$a = \frac{F}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} = \frac{40.0\,\mathrm{N}}{16.0\,\mathrm{kg}} = 2.50\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

(2) バネの伸び ℓ はフックの法則から

$$\ell = \frac{F_\mathrm{BA}}{k} = \frac{25.0\,\mathrm{N}}{4.00 \times 10^2\,\mathrm{N\,m^{-1}}} = 6.25 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

問 3.4 (基本)

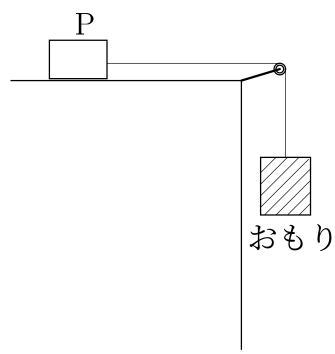
図のように、滑らかな水平面上に、伸びないひもで結ばれた物体 A、B を置き、図の右方向に一定の力 F [N] で引っ張る。A、B の質量をそれぞれ m_{A} [kg]、m_{B} [kg] とする。また、A、B を結ぶひもの張力の大きさを T [N] とし、運動方向を正の向きにとる。



(1) A の加速度の大きさを a_{A} [m/s^2] として、A の運動方程式を書け。
(2) B の加速度の大きさを a_{B} [m/s^2] として、B の運動方程式を書け。
(3) A の加速度の大きさを m_{A}、m_{B}、F を用いて表せ。
(4) 張力の大きさ T を m_{A}、m_{B}、F を用いて表せ。

問 3.5 (基本)

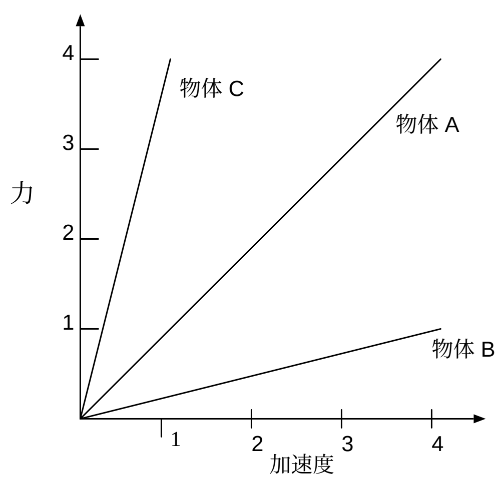
図のように、滑らかな水平台の上に小物体 P(質量 m[kg]) を置き、軽い滑車を通して、糸でおもり (質量 M[kg]) と結ぶ。はじめ、糸がたるまない状態にして、おもりを支えておき、静かに放した。糸の張力を T [N] とし、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。



(1) P の運動方程式を求めよ。
(2) おもりの運動方程式を求めよ。
(3) 加速度の大きさはいくらか。(m, M, g を用いて表せ)
(4) 張力の大きさ T はいくらか。(m, M, g を用いて表せ)

問 3.6

右の図は運動している物体の加速度と, 物体に働く力に関する測定器の目盛の読みをプロットしたものである。
(1) この図から物体 A, B, C の質量について何がいえるか？
(2) 水平面上をロープで引っ張ることにより物体を運動させているとき, 物体に働く力はどうすれば測れるか? 諸君のアイデアを述べよ。



第4章　空間中の運動の取り扱い

座標系、位置ベクトル、力のベクトル、座標系の平行移動について学ぶ。

大きさが、それぞれ $|\boldsymbol{A}| = A$ および $|\boldsymbol{B}| = B$ で、そのなす角度が θ の 2 つのベクトル、$\boldsymbol{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z)$、$\boldsymbol{B} = (B_x,\, B_y,\, B_z)$ を考える。

1. ベクトルの和　$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x,\, A_y + B_y,\, A_z + B_z)$
2. ベクトルのスカラー積　$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
3. ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさ　$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

ベクトルの図形表現

一方の先端に矢印を付けた線分で表す。空間に描かれている場合は線分の配置で方向を示している。線分の長さはベクトルの大きさを表し、矢印でベクトルの向きを表す。

位置ベクトル	矢印の先で運動する物体 (質点) の位置を表す。矢印の始点は常に原点である。
力のベクトル	力の大きさ、方向、作用点を表す。

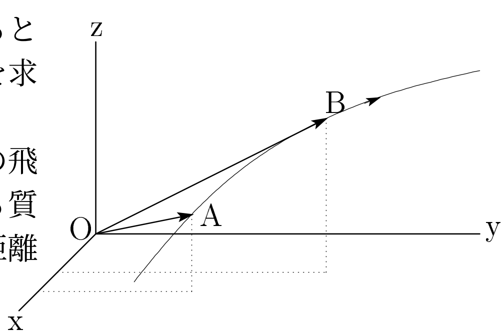
4.1　空間のベクトル

[例題] 4.1

質点が時刻 t_1 に点 A を、時刻 t_2 に点 B を通過した。

(1) 点 A、点 B の位置ベクトルを、それぞれ $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = (7,5,3)$、$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = (5,7,9)$ とするとき、変位 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ およびその大きさを求めよ。

(2) t_1 と t_2 の差が 2 秒のとき、AB 間の飛跡を直線と見なして、AB 間における質点の平均の速さを求めよ。ただし、距離の単位は m とする。



[解] (1) 2 つの位置ベクトルの差を求める。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = (5,7,9) - (7,5,3) = (-2,2,6)$$

大きさは

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

(2) 平均の速さは、速さの定義「速さ=移動した距離/その間の時間」より

$$\langle v\rangle = \frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{t_2 - t_1} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}\ \mathrm{m/s}$$

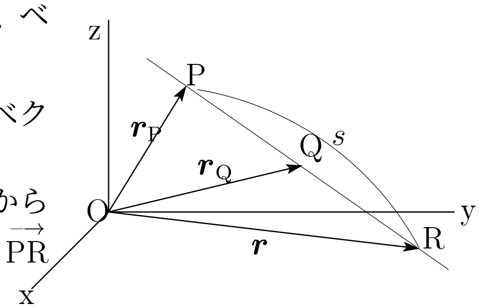
[例題] 4.2

2 つの定点 P、Q を表す位置ベクトルを、それぞれ $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$、$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ とする。

(1) $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = (-2,3,5)$、$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = (3,9,4)$ のとき、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ方向をもつ単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ。

(3) 2 点 P、Q を通る直線上において、P から距離 s にある点を R とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を s と $\boldsymbol{n}$ を用いて表せ。



(4) 直線上の点 R を表す位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$、$\boldsymbol{n}$、$s$ を用いて表せ。

(5) この結果を用いて、2 点 $(-2,3,5)$, $(3,9,4)$ を通る直線式を求めよ。

[解] (1) ベクトル差 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ を計算する。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (3,9,4) - (-2,3,5) = (5,6,-1)$ (大きさ $= \sqrt{25+36+1} = \sqrt{62}$)

(2) 単位ベクトル $\boldsymbol{n} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{62}}(5,6,-1)$

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = s\boldsymbol{n}$

(4) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + s\boldsymbol{n}$

(5) s をパラメータとして、$\boldsymbol{r}$ の x,y,x 成分を求めると

$$x = -2 + \frac{5}{\sqrt{62}}s,\quad y = 3 + \frac{6}{\sqrt{62}}s,\quad z = 5 + \frac{-1}{\sqrt{62}}s$$

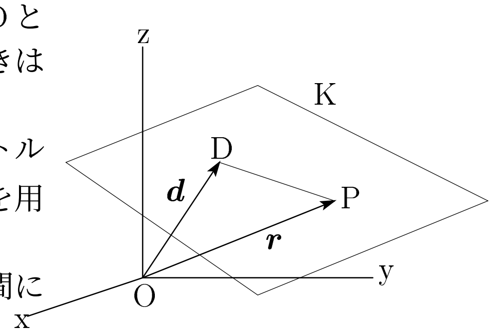
s を消去すると、$\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{6} = \dfrac{z-5}{-1}$

[例題] 4.3

3次元座標で、1つの平面Kを考える。原点OよりK上に垂直に下した直線の足をDとし、ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\boldsymbol{d}$と表す。($\boldsymbol{d}$の向きは平面と垂直になっている)

(1) K上の任意の点Pを表す位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$とする。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{DP}}$を$\boldsymbol{d}$と$\boldsymbol{r}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{DP}}$と位置ベクトル$\boldsymbol{d}$の間に成り立つ関係式を求めよ。



(3) 位置ベクトル$\boldsymbol{d}$の方向余弦を(ℓ, m, n)、位置ベクトル$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$とするとき、$\ell x + my + nz = |\boldsymbol{d}| = d$が成り立つことを示せ。

[解](1) $\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}$

(2) ベクトル$\boldsymbol{d}$とベクトル$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}$は直交しているから

$$\text{スカラー積}\quad \boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}) = 0$$

(3) $\boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}) = 0 \quad \to \quad \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{r} = d^2 \quad \to \quad \dfrac{\boldsymbol{d}}{d} \cdot \boldsymbol{r} = d$

$\dfrac{\boldsymbol{d}}{d}$は$\boldsymbol{d}$と同じ方向を持つ単位ベクトルである。

$\boldsymbol{d}$の方向余弦を(ℓ, m, n)とすると

$$\frac{\boldsymbol{d}}{d} = (\ell, m, n) \quad (\text{ここで } \ell^2 + m^2 + n^2 = 1 \text{ である})$$

であるから、x, y, z軸方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$とすると

$$\frac{\boldsymbol{d}}{d} \cdot \boldsymbol{r} = (\ell \boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}) \cdot (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \ell x + my + nz = d$$

問 4.1 (基本)

2次元ベクトル$\boldsymbol{A} = (0, 1)$、$\boldsymbol{B} = (\sqrt{3}, 0)$を考える。

(1) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$のなす角度はいくらか。

(2) 2つのベクトルの和$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$および大きさ$|\boldsymbol{C}|$を求めよ。

(3) 2つのベクトルの差$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$および大きさ$|\boldsymbol{D}|$を求めよ。

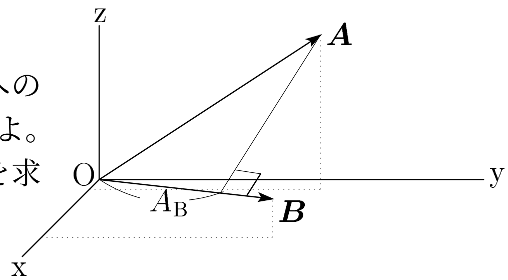
(4) $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$のなす角度はいくらか。

問 4.2 (基本)

2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (1, 5, 4)$、
$\boldsymbol{B} = (3, 6, 2)$ がある。

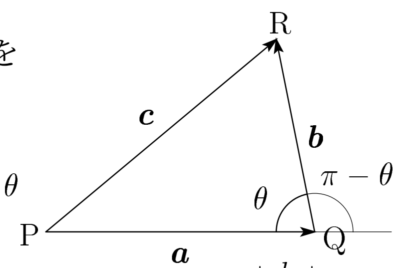
(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ のベクトル $\boldsymbol{B}$ への射影成分の大きさ $|\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}|$ を求めよ。

(2) 射影成分 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ の x,y,z 成分を求めよ。



問 4.3

図のように、3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で $\triangle$PQR を作る。



(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 間に成り立つ関係式を書け。

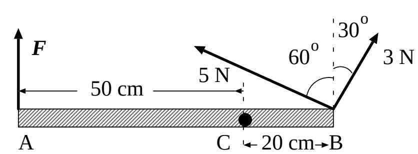
(2) $\angle\mathrm{PQR} = \theta$ とするとき、$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $\triangle$PQR の面積 A は、A$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (ただし $s = \dfrac{a+b+c}{2}$) と書けることを示せ。

4.2 力のベクトル

[例題] 4.4

剛体の棒が点 C の周りに回転できる。図のように剛体の端点 B に 5 N の大きさの力と 3 N の力をかけたとき, 他の端点 A にどれだけの力をかければ, つりあいの状態になるか? このとき, 回転軸 C にはどのような力が働くか?



[解] 点 B に働く力の剛体に垂直な成分は $(5 + 3\sqrt{3})/2$ N. てこの釣合の原理によって, 点 A で剛体棒に垂直に $(1 + \frac{3}{5}\sqrt{3})$ N の力をかけるとつりあい状態が実現される。

回転軸 C には棒の軸方向に $(3 - 5\sqrt{3})/2$ N, 垂直方向に $(\frac{7}{2} + \frac{21}{10}\sqrt{3})$ N の力が働く。これとちょうどつりあう抗力が棒に働く。

注:
高校数学で学んだベクトルは平面または空間のベクトルで, 大きさと方向を持った平行移動しても変わらない量であると定義されていた。しかし, 力のベクトルは作用する場所が重要であり, 平行移動すると異なった働きをする。つまり, 高校数学で学んだベクトルとは異なるものである。

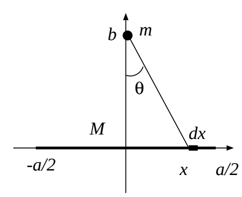
a と **b** の合成と **b** と **a** の合成が同じになるような操作を足し算と言う。変位の合成も力の合成も合成の順序によらない。

a と **b** の足し算ができ, 数値 k とのかけ算 $k\mathbf{a}$ ができる何者か, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ をベクトルという。空間のベクトルも力のベクトルもこの性質を持っている。

注:
有限の大きさの回転も大きさ (角度) と方向 (回転軸) を持った量である。しかし、これはベクトルではない。たとえば、本を持ち、綴じ代のある辺のまわりに 90° 回転した後、本の底辺のまわりに 90° 回した結果と、底辺のまわりに 90° 回した後、綴じ代まわりに 90° 回した結果を比べてみよ。もしベクトルならば同じ結果にならなければならない。

しかし、角速度や角運動量など無限小回転で定義されるものはベクトルである。無限小操作、つまり微分と、ベクトルの間には密接な関係がある。

問 4.4
万有引力の法則にしたがって引力を及ぼす質量 M, 長さ a の一様な細い棒の中点から垂直に距離 b 離れた点にある質量 m の質点に働く力を求めよ。



4.3 ベクトル量の微分

[例題] 4.5
時刻 t における質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y)$ がつぎの式で与えられるとき、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ および加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ を求めよ。

$$(1) \quad \begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases} \qquad (r,\ \omega \text{は定数})$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = v_0\cos\theta\cdot t \\ y = -\dfrac{1}{2}at^2 + v_0\sin\theta\cdot t + h \end{cases} \qquad (v_0,\ \theta,\ a,\ h\ \text{は定数})$$

[解](1) 時間についての微分 $\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{d^2x}{dt^2}$ を $\dot{x},\ \ddot{x}$ のように表す。
速度の x 成分、y 成分は、 $\dot{x} = -r\omega\sin\omega t,\quad \dot{y} = r\omega\cos\omega t$
加速度の x 成分、y 成分は、 $\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t,\quad \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t$

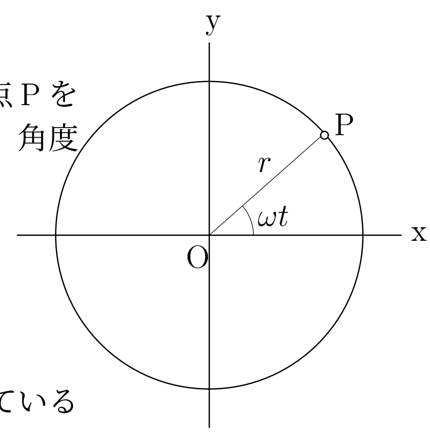
したがって

$$\boldsymbol{v} = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t),$$
$$\boldsymbol{a} = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t) = -\omega^2\boldsymbol{r}$$

(2) $\boldsymbol{v} = (v_0\cos\theta,\ -at + v_0\sin\theta), \quad \boldsymbol{a} = (0, -a)$

問 4.5 (基本)

半径 r、角速度 ω の等速円運動をしている質点 P を考える。x-y 平面の原点 O を回転の中心とし、角度は x-軸から反時計まわりに測るものとする。



(1) P の位置 (x, y) を極座標で表せ。
(2) 速度の x,y 成分 v_x, v_y を求めよ。
(3) 加速度の x,y 成分 a_x, a_y を求めよ。
(4) 速度、および加速度の大きさを求めよ。
(5) 速度ベクトルと加速度ベクトルが直交していることを示せ。

問 4.6 (基本)

質量 m の質点の位置が $\boldsymbol{r} = A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j} + v_0 t\,\boldsymbol{k}$ で与えられている。

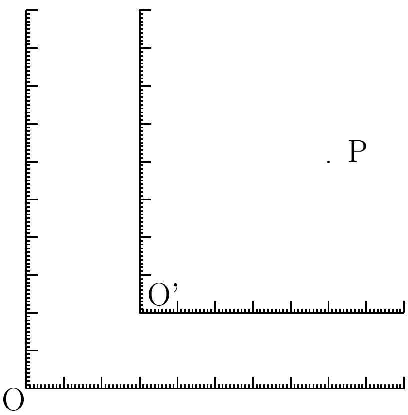
(1) 速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ。
(2) この質点に働いている力 $\boldsymbol{F}$ を求めよ。
(3) 軌道式を求めよ。
(4) 運動エネルギーを求めよ。

4.4 座標系の平行移動

[例題] 4.6

高校ではグラフの平行移動を学んだが，ここでは座標系の平行移動を考える。

原点を点 O とする座標系で 点 P の座標が $(8,6)$ であった。原点を $(3,2)$ だけ平行移動した座標系の原点を O' とすると, この座標系で点 P の座標はいくらか?
同じ点 P のもとの座標系での座標 (x,y) と新しい座標系での座標 (x',y') の間にはどのような関係があるか?



[解] 図より, もとの座標系で $(8,6)$ であった点 P の新しい座標系での点 P の座標は $(5,4)$ である。

x 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_1$, y 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_2$ とすると, もとの座標系で点 P の座標成分が (x,y) であるとは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

であり, 同じ点の新しい座標系での成分が (x',y') であるとは

$$\overrightarrow{\mathrm{O'P}} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2$$

である。平行移動の量が $(3,2)$ であるとは

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$

であるから成分を比較することにより

$$\begin{aligned} x &= 3 + x' \\ y &= 2 + y' \end{aligned}$$

であることが分かる。

注: 高校で学んだグラフの平行移動変換は能動的変換と呼ばれる。ここで学んだような座標系の変換は受動的変換と呼ばれる。これは大学で始めて学ぶ新しい考え方である。物理学では特定の受動的変換にたいして何かが変化しないという形で法則が記述されることが多い。慣性の法則はその典型である。

問 4.7 (基本)
鉛直に一定の速さ v [m/s] で降っている雨を、水平方向に一定の速さ V [m/s] で走っている列車の窓から見ると、ある角度だけ傾いて降っているように見えた。
(1) 列車から見たときの雨滴の落下の速さ v' はいくらか。
(2) $V = 5$ [m/s] のとき、列車から見た雨の鉛直とのなす角度は 30° であった。このとき、v の値はいくらか。

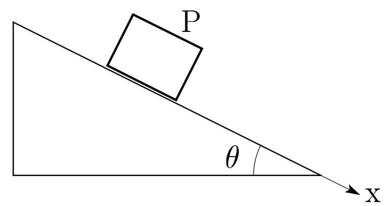
問 4.8
真東に動く人にとって風は北西の方向, 北から測って α° の方向から吹いて来るように思われ, 同じ速度で真北に動く人にとっては北から測って β° の方向から吹いて来るように思われる。風の吹いているほんとうの方向を求めよ。

第5章　重力と落下運動

斜面上の運動、投射運動を扱い、運動の初期条件について学ぶ。

[例題] 5.1

傾斜角 θ の滑らかな面をもつ斜面上に、質量 m [kg] の物体Pを静かに置いたところ、一定の加速度で斜面を滑り始めた。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。また斜面に沿って下向きにx軸をとる。



(1) Pが斜面から受ける垂直抗力を N [N] とする。Pに働く合力の、x軸に平行な成分 $F_{\|}$ と、垂直な成分 $F_{\perp}$ を求めよ。
(2) Pのx方向の運動を表す運動方程式を書け。
(3) 始めに置いた地点からPが斜面を距離 ℓ [m] だけ滑り落ちるのに要する時間を求めよ。

[解] (1) Pは地球の重力により鉛直下向きの力 mg [N] を受けている。従って、Pが受ける斜面に平行な方向の力は

平行成分: $F_{\|} = mg\sin\theta$

である。一方、斜面に垂直な方向には、重力以外に、斜面から垂直抗力 (mg の垂直成分と同じ大きさで逆向き) を受けている。従って

垂直成分: $F_{\perp} = N - mg\cos\theta = 0$

(2) 斜面に沿って下向きを正にとり、Pの加速度の大きさを a [m/s^2] とすると

$F_{\|} = ma \;\rightarrow\; a = g\sin\theta$

時刻 t におけるPの位置を x とすると、加速度は $\ddot{x}$ と表せるので運動方程式は $\ddot{x} = g\sin\theta$ と書くことができる。

(3) 斜面上に置いた瞬間を $t = 0$ とする。このときPは静止していた。はじめのPの位置を原点にとり、運動方程式 $\ddot{x} = g\sin\theta$ をこれらの初期条件で解く。速度を $v = \dot{x}$ とおくと運動方程式は $\dot{v} = g\sin\theta$ と書けるから、これより $dv = g\sin\theta dt$ と変形し、両辺を積分する。

時刻 t における速度を v とすると

$$\int_0^v dv = \int_0^t g\sin\theta\,dt \ \to\ v = gt\sin\theta$$

$v = \dot{x} = gt\sin\theta$ より $dx = gt\sin\theta\,dt$ と変形し両辺を積分する。時刻 t における位置を x とすると

$$\int_0^x dx = \int_0^t gt\sin\theta\,dt \ \to\ x = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$$

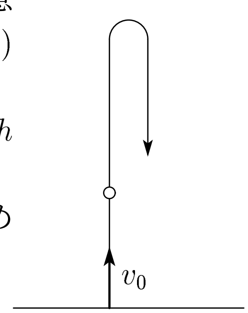
これより、$x = \ell$ となる時刻は

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}}$$

問 5.1 (基本)
水平な床に滑らかにつながれた傾斜角 θ の斜面がある。はじめ、床に小物体 P を置き、斜面に向かって初速 v [m/s] を与えた。P が斜面を上り始めてから最高点に達するまでの時間と斜面に沿って測った距離を求めよ。ただし、水平な床も斜面も滑らかであるとし、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

[例題] 5.2
地上において、質量 m [kg] の小物体を初速 $v_0 = 15.0$ m/s で真上に投げた。鉛直上向きを z 軸正方向にとり、重力加速度の大きさを $g = 9.8$ m/s^2 として、次の問に答えよ。

(1) 小物体が従う運動方程式を書け。
(2) 時刻 $t = 0$ で位置 $z = 0$、速度 $v = v_0$ のとき、任意の時刻 t における小物体の速度 $v(t)$ および位置 $z(t)$ を求めよ。
(3) 最高点に達するまでの時間 t_1、およびその高さ h を求めよ。
(4) 投げ上げてから地上に落ちるまでの時間 t_2 を求めよ。
(5) 地上に落ちる直前の速度 v_2 を求めよ。



[解] (1) 物体に働く力としては、重力のみが関与している。上向きを正にとっているので　$m\ddot{z} = -mg$

(2) 初期条件 $t=0$ で $z=0, \quad v=\dot{z}=v_0$ を考慮すると、

$$v(t)=-gt+v_0, \quad z(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

(3) 最高点では速度は 0 であるから、最高点に達するまでの時間を t_1 とすると $v(t_1)=-gt_1+v_0=0$ が成り立つ。したがって

$$t_1=\frac{v_0}{g}=\frac{15.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}=1.53\,\mathrm{s}$$

となる。またその高さは

$$h=z(t_1)=-\frac{1}{2}g(\frac{v_0}{g})^2+v_0\frac{v_0}{g}=\frac{v_0^2}{2g}=\frac{(15.0\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}=11.5\ \mathrm{m}$$

(4) $t=t_2$ で $z=0$ となるから $z(t_2)=-\dfrac{1}{2}gt_2^2+v_0t_2=0$ 従って

$$t_2=\frac{2v_0}{g}=\frac{2\times 15.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}=3.06\ \mathrm{s}$$

(5) $t=t_2$ における速度は

$$v(t_2)=v_2=-g\frac{2v_0}{g}+v_0=-v_0=-15.0\ \mathrm{m/s}$$

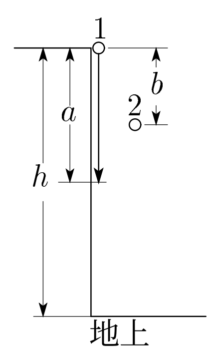
問 5.2 (基本)

地上より、ある初速度で小物体 P を鉛直上方に投げ上げたところ、P は 4 秒後に地上に落下した。空気の抵抗は無視できるとし、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

(1) P が達した最高点の高さ h はいくらか。

(2) 初速度 v_0 はいくらか。

問 5.3



塔の頂上から落とした第 1 の石が a [m] 落下したとき、頂上から b [m] 下の点で第 2 の石を落としたら、二つの石が同時に地上に達した。

(1) 第 1 の石が a [m] 落下するまでの時間 t_1 を求めよ。

(2) 塔の高さを h [m] とすると、第 1 の石が地上に達するまでの時間 t_2 はいくらか。

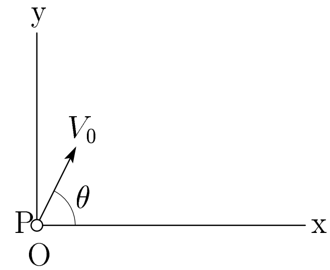
(3) 第 2 の石が地上に達するまでの時間 t_3 を求めよ。

(4) 塔の高さ h はいくらか。

[例題] 5.3

地上から小石P(質量 m [kg]) を初速 V_0 [m/s]、水平方向となす角 θ で投げ上げた。投げ上げた位置を原点O、水平方向をx軸、鉛直上方をy軸にとり、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

(1) Pのx方向の運動方程式を求めよ。
(2) Pのy方向の運動方程式を求めよ。
(3) 時刻 $t = 0$ における位置、速度の値 (初期条件) を求めよ。



[解] (1) 水平方向には何ら力が働いていない。

$$m\ddot{x} = 0$$

(2) 鉛直下向きには重力が働いているので

$$m\ddot{y} = -mg$$

(3) 原点において、大きさ V_0 の速度をもっているから

$$t = 0 \text{ で } x = y = 0、\quad \dot{x} = V_0 \cos\theta,\ \dot{y} = V_0 \sin\theta$$

問 5.4 (基本)

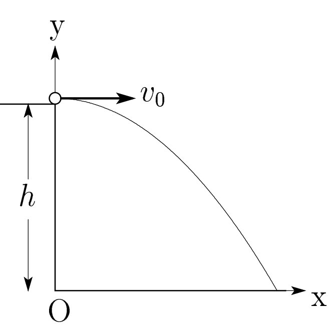
地上から小石P(質量 m [kg]) を初速 V_0 [m/s]、水平方向となす角 θ で投げ上げた。投げ上げた位置を原点O、水平方向をx軸、鉛直上方をy軸にとり、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

(1) 投げてから最高点に達するまでの時間 t_1 はいくらか。
(2) 最高点の高さ h はいくらか。
(3) 水平な地上におけるPの落下地点 x_1 はいくらか。

[例題] 5.4

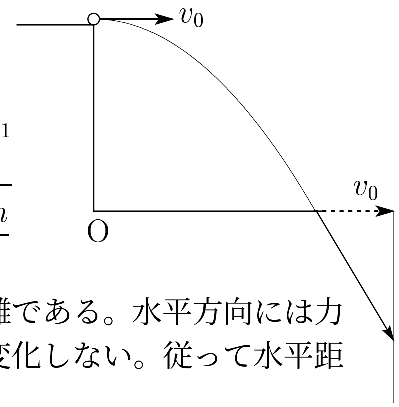
水平な地上からの高さが h [m] の塔の上から、小物体を初速 v_0 [m/s] で、水平方向に投げた。投げた瞬間を $t = 0$ s とする。
水平方向をx軸、鉛直上向きをy軸とし、塔の真下の地上を原点にとる。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

(1) 地上に落下するまでの間の任意の時刻 t における小物体のy方向の位置 $y(t)$ をもとめよ。
(2) 小物体が地上に落ちるまでの時間 t_1 はいくらか。
(3) 地上に落ちた地点までの水平距離 ℓ はいくらか。



[**解**](1) 小物体 (質量 m) の運動は $m\ddot{y} = -mg$ に従う。時刻 $t = 0$ のとき、位置 $y = h$, 速度の鉛直成分 $v_y = 0$ であるから、初速度 0 の自由落下と同じ解

$y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h$ を得る。



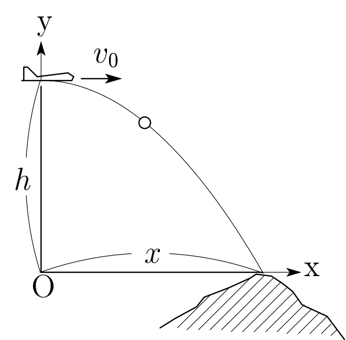
(2) 投げてから地上に達するまでの時間を t_1 とすると、

$$y(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + h = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(3) 時間 t_1 の間に動く水平距離が求める距離である。水平方向には力が働いていないので、速度の水平成分は変化しない。従って水平距離は、$\ell = v_0 \times t_1 = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

問 5.5 (基本)
水平な地上からの高さが h [m] の塔の上から、小物体を初速 v_0 [m/s] で、水平方向に投げた。小物体が地上に落下する直前の速さはいくらか。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

問 5.6 (基本)
飛行機で、200 m 下の山頂に取り残された登山者に、救援物資を投下したい。飛行機が水平に 250 km/h で飛行しているとき、何 m 手前で物資を投下すればよいか。ただし、重力加速度の大きさを $g = 9.8$ m/s^2 とし、空気の抵抗は無視できるとする。



第 6 章　微小振動

物体に外力を加えると物体は変形する。力が大きすぎると物体の変形が元に戻らなかったり物体を破壊するが、ある限度内の力であれば、力を取り除けば物体は完全に元の状態に戻る。このとき、変形を阻止する方向に働く力を f とし、物体の変形の大きさ (変位) を x と書くと、$f \propto x$ の関係 (フックの法則) がある。この 1 つの例は、ばねの伸びと力の関係である。ここでは、物体は変形しないが、その物体に働く力が、安定な位置からの変位に比例する場合、どのような運動を引き起こすかを調べる。

6.1　線形性の原理

変位に比例する力の取り扱い方を学ぶ。問題の答えを決める様々な初期条件を読み取る力を養う。

[**例題**] **6.1**
安定点から測った距離 (x) に比例する力 $(-kx)$ を受けて運動する質点の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx$$

と書ける。
(1) 時刻 $t = 0$ で、位置 $x = 0$、速度 $v = \dot{x} = v_0$ のとき、運動方程式を解け。
(2) 周期 T を求めよ。

[**解**] (1) 微分方程式 $m\ddot{x} = -kx$ の解は、単振動を表す式

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad ただし\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

である。これから質点の速度は $v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$ となる。

注
2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

の一般解は 2 つの任意定数, A と δ または A と B を用いて

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

とも

$$x = A\sin(\omega t + \delta)$$

とも

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

とも書ける。

t=0 のとき $x = 0,\ v = v_0$ であるから (初期条件)

$$A\cos\delta = 0 \cdots ①, \qquad -A\omega\sin\delta = v_0 \cdots ②$$

①から $A \neq 0$ であるから $\delta = \pi/2$(主値)、
②から $A = -\dfrac{v_0}{\omega}$ を得る。
従って　$x = -\dfrac{v_0}{\omega}\cos(\omega t + \pi/2) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$

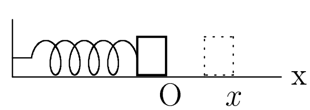
(2) 関数 $\cos\theta$ において、位相 θ が 2π ずれても、関数値はかわらない。$x = \cos(\omega t + \delta)$ において、この関数の周期を T とすると、t を $t + T$ と変化させても、関数値すなわち変位 x の値は変わらない (周期の定義)。即ち、$\omega(t+T) + \delta = \omega t + \delta + \omega T = \omega t + \delta + 2\pi$ となっていなければならない。従って、$\omega T = 2\pi \ \rightarrow \ T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ となる。

問 6.1 (基本)
安定点から測った距離 (x) に比例する力 $(-kx)$ を受けて運動する質点の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx$$

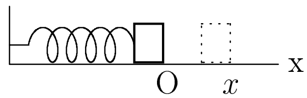
と書ける。
(1) 時刻 $t = 0$ で、位置 $x = a$、速度 $v = \dot{x} = 0$ のとき、運動方程式を解け。
(2) 周期 T を求めよ。

問 6.2 (基本)
はじめ、滑らかな水平な床の上に、ばね定数 k [N/m] のばねの一端を固定し、他端に質量 m [kg] の小物体を取り付け、静止させておく。
その後、ばねを自然長より a [m] だけ伸ばし、静かに放したところ、小物体は直線上で振動を始めた。
(1) 振動方向を x 軸にとり、静止していた位置を原点 O として、小物体が位置 x にあるときの運動方程式を書け。
(2) 運動方程式の初期条件を書け。



問 6.3 (基本)

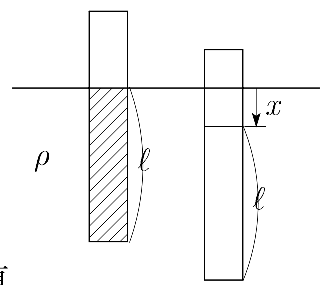
表面が滑らかな水平台の上に、左端を固定し、右端に質量 m [kg] の物体 P を取り付けたばね (ばね定数 k [N/m]) を置き、静止させる。つぎに、P に瞬間的に、右向きに初速 v_0 [m/s] を与えたところ、P は直線上で振動を始めた。P が初め静止していた位置を原点として、右向きに x 軸をとる。



(1) P が位置 x にあるとき、P に働く水平方向の力はいくらか。
(2) P の運動方程式を書け。
(3) 右向きの初速 v_0 を与えた瞬間を $t=0$ として、運動方程式の初期条件を書け。
(4) 運動方程式の解の形を $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$ (ただし$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$) とおいて解け。
(5) ばねは、自然長より最大いくらまで伸びるか。

問 6.4

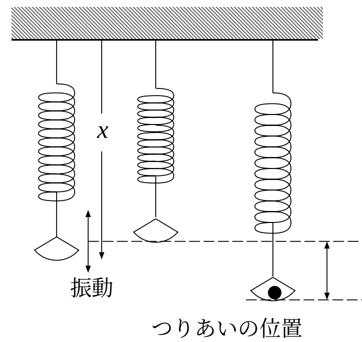
一様な太さの棒 A(質量 M [kg]、断面積 S [m^2]) が、鉛直の状態で、水に浮かんで静止している。A の水中の部分の長さは ℓ [m] であった。水の密度を ρ [kg/m^3]、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。



(1) M を求めよ。
(2) A を少し水中に押し下げて手を離したら、A は鉛直線上で振動を始めた。静止状態から測った水中方向への距離を x とする。A の運動方程式を求めよ。
(3) 振動の周期 T を求めよ。

6.2　初期条件の読み取り

[例題] 6.2
軽いつる巻きバネの上端を固定し，下端に $M = 10.0\,\mathrm{g}$ の皿を吊して振動させると，その周期は $T = 0.5\,\mathrm{s}$ であった。皿が静止しているとき，静かにその上に $m = 6.0\,\mathrm{g}$ のおもりを乗せると皿はどのような運動をするか?



[解] バネの上端から測ったおもりの位置を x, バネの自然長を ℓ, バネ定数を k とすると, 皿に何も乗せていない時、運動方程式は

$$M\ddot{x} = -k(x - \ell) + Mg. \quad \dots \text{①}$$

となる。この場合、つり合いの位置を x_1 とすると、

$$-k(x_1 - \ell) + Mg = 0 \qquad \dots \text{②}$$

が成り立つ。つり合いの位置からの伸びを ξ と書くと、

$$\xi = x - x_1\,, \quad \ddot{\xi} = \ddot{x}$$

となるので、②式を①式へ代入し、ξ を用いて書き直すと

$$M\ddot{\xi} = -k\xi$$

となる。これより、つり合いの位置を原点に選び、運動を記述すると式が簡単になることが分かる。これはまた、皿はつり合いの位置 (静止させたときの位置) を中心に振動することを意味する。
この運動の振動周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ である。

皿に質量 m のおもりを乗せた時、
同様にして、つり合いの位置からの伸びを η とすると、

$$(M + m)\ddot{\eta} = -k\eta$$

となる (各自、こうなることを確かめよ)。
この場合、周期は $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$ となる。従って、

$$T' = T\sqrt{\frac{M+m}{M}} = 0.5\sqrt{\frac{16\,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{kg\,m^{-2}}}} = 0.63\,\mathrm{s}$$

となる。

次に、振動の振幅を求める。
1) 皿だけで静止していた状態からおもりを乗せて振動させた。
2) 振動はつり合いの位置を中心にして振動する。
従って、振幅は皿だけで静止していた位置とおもりを乗せて静止させた位置との差である。ここでは、ばねの自然長からの伸びの差として求めよう。皿だけで静止しているとき、ばねの自然長からの伸びを a_1 とすると

$$Mg = ka_1$$

となる。皿におもりを乗せて静止させているとき、ばねの自然長からの伸びを a_2 とすると

$$(M+m)g = ka_2$$

となる。従って、振幅の大きさ A は、$k = M\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = 1.58\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$ を用いて

$$A = a_2 - a_1 = \frac{mg}{k} = \frac{6.0\times10^{-3}\,\mathrm{kg}\times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{1.58\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 3.7\times10^{-2}\,\mathrm{m} = 3.7\,\mathrm{cm}$$

となる。したがって、おもりを乗せた場合、周期 0.63 s、振幅 3.7 cm の振動を行う。

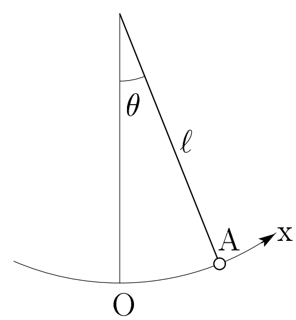
問 6.5 (基本)
ばね定数 k [N/m] のばねの上端を固定し、垂直に吊り下げた。ばねの下端に質量 m [kg] のおもりを取り付け静止させたところ、ばねは元の長さより Δx [m] だけ伸びた。このつり合いの位置から、さらに a [m] だけ下向きに引き下げ、静かに手を離した。つり合いの位置からのばねの伸び

が x [m] のとき、おもりに働くすべての力を考え、おもりの運動方程式を書け。また、おもりの運動は重力に依存せず、周期が $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ [s] の単振動であることを示せ。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

問 6.6
水平な台上にある物体をゴム紐の端に結び, 紐の上端を鉛直に $v = 60.0\,\mathrm{cm/s}$ の一定速度で持ち上げたところ, 紐が $\ell = 20.0\,\mathrm{cm}$ だけ延びた時, 物体は台から離れて運動を始めた。その後の物体の運動を調べよ。

6.3 線形近似

[**例題**] **6.3**
一端を固定した長さ ℓ [m] の糸の他端におもり A(質量 m [kg]) をとりつけ、鉛直面内で微小振動をさせる。振り子の最下点から測った軌跡に沿った長さを x で表す。重力加速度の大きさを g [m/s^2] として次の問に答えよ。



(1) 糸と鉛直とのなす角が θ のとき、A に働く力のうち、A の運動の軌跡の接線方向の力はいくらか。
(2) 微小振動 ($\theta << 1$) のとき、$\sin\theta = \theta$ とみなせる。運動方程式を書け。
(3) 周期 T を求めよ。

[**解**] (1) おもりの運動の軌跡の接線方向の力は、 $-mg\sin\theta$

(2) 振り子の最下点を原点とし、軌跡に沿って x 軸をとると、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta$$

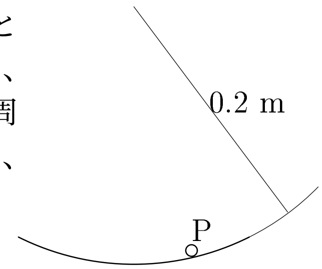
微小振動であるから $\sin\theta = \theta$ とおける。よって $\ddot{x} = -g\theta$ となる。$x = \ell\theta$ の関係より、運動方程式は $\ddot{x} = -\dfrac{g}{\ell}x$

(3) 上の運動方程式の解は

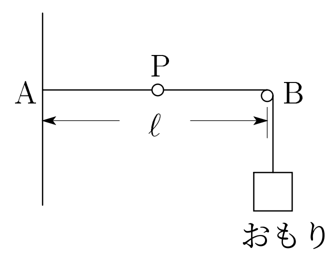
$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad (\text{ただし } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}})$$

の形である。したがって、周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

問 6.7 (基本)
底面の近くの断面が、曲率半径 0.2 m の円弧の一部とみなせる器がある。小物体 P を器の底の近くに置いて、静かに放したところ、P は振動をはじめた。振動の周期はいくらか。ただし、器の表面は滑らかであるとし、重力加速度を 9.8 m/s^2 とする。



問 6.8
図のように、糸の一端を点 A に固定し、他端に質量 M [kg] のおもりを付け、糸が水平になるよう軽い滑車 B を通して吊るす。水平な糸の中央に、質量 m [kg] の小物体 P を取り付け、水平面内で糸と垂直方向にわずかに引張って放したところ、P は振動を始めた。振動の周期を求めよ。ただし、P は糸と同じ水平面内にあるとし、糸の AB 間の距離を ℓ [m]、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。



話題 皆さんはぶらんこをある一定の周期で押すとぶらんこの揺れが次第に大きくなる現象をよく知っているであろう。これは**共鳴**と呼ばれる現象である。周期的外力の振動数をぶらんこの**固有振動数**に近づけていくにつれて、ぶらんこの**振幅**が急激に増加するのである。

2 つの音叉や音叉と共鳴箱のような 2 つの振動系の場合も両者の固有振動数が近ければエネルギー交換が生じやすい。

電気回路の場合は**共振**という言葉を使うことが多い。無線の受信機などで共振回路の共振周波数を目的の周波数に合わせて電波を受信するなどの応用がある。

数学的な取扱がこの教科書の程度を越えるので、ここではその分析は行えないが、物理的な知識として知っておく必要のある事実である。

第7章　仕事とパワー

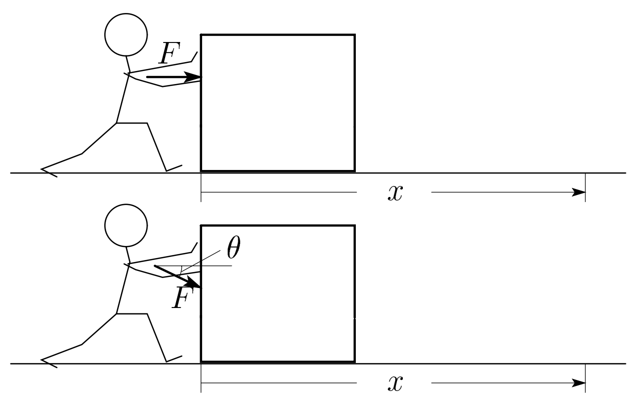
高校で学んだ仕事の概念を一般化するため、ベクトルの内積と区分求積法の考え方を学び、力の方向と仕事の関係を調べる。

力のする仕事=力 × 移動距離 → $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x} = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{x}| \cos\theta$

パワー (仕事率)=単位時間あたりの仕事

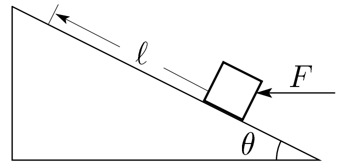
[例題] 7.1
はじめ、水平面上に静止していた物体P(質量 M [kg]) に、一定の力 F [N] を加えつづけて、距離 x [m] だけ移動した。
重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

(1) 力 F が水平方向の場合、力がした仕事 W_1 はいくらか。
(2) 力 F が水平方向と角 θ の傾きをもっていた場合、力がした仕事 W_2 はいくらか。
(3) また、物体と水平面との間の動摩擦係数を μ' とすると、摩擦力のした仕事 W_3 はいくらか。



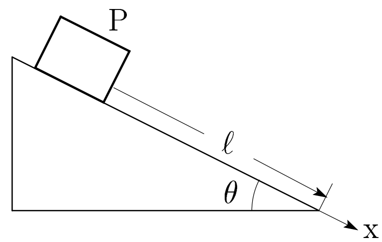
[解](1) $W_1 = Fx$ [J]
(2) $W_2 = Fx\cos\theta$ [J]
(3) $W_3 = -\mu' Mgx$ [J]

問 7.1 (基本)
図のように、傾斜角 θ の斜面上を水平方向の一定力 F [N] で物体 (質量 M [kg]) を押し上げ、斜面に沿って ℓ [m] だけ移動した。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。



(1) 力 F のした仕事はいくらか。
(2) 重力のした仕事はいくらか。

問 7.2 (基本)
傾斜角 θ のあらい面をもつ斜面に物体 P(質量 M [kg]) を置いたところ、P は一定の加速度で、斜面に沿って距離 ℓ [m] をすべった。P と斜面との間の動摩擦係数を μ'、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。



(1) P に働く重力がした仕事 W_1 はいくらか。
(2) P に働く摩擦力がした仕事 W_2 はいくらか。

[例題] 7.2
一端を固定した長さ ℓ [m] の軽い糸の他端に質量 m [kg] のおもり A をつけた振り子を考える。おもり A を糸が鉛直線となす角が θ_0 になるまで持ち上げ、手を離す。糸が鉛直になるまでに重力が行った仕事 W [J] を仕事の定義にしたがって求めよ。そのとき、糸の張力はどれだけの仕事をするか。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

[解] おもりが $\ell d\theta$ 動く時、重力の運動方向の成分は $g\sin\theta$ となる。$\theta=\theta_0$ から $\theta=0$ に至る経路を正にとれば、$d\theta<0$ であるから移動距離 $\ell d\theta$ の向きと $g\sin\theta$ の向きは互いに逆となる。 従って、求める仕事は

$$W=\int_{\theta_0}^{0}-mg\sin\theta\ell d\theta=mg\ell[\cos\theta]_{\theta_0}^{0}=mg\ell(1-\cos\theta_0).$$

糸の張力の運動方向の力の成分は 0 だから, 張力のする仕事は 0 である。

問 7.3 (基本)
地上において地面から高さ h [m] まで物体 (質量 m [kg]) を投げ上げた。重力がした仕事を、垂直上向きを z 軸にとり計算せよ。重力加速度の大

きさを g [m/s^2] とする。

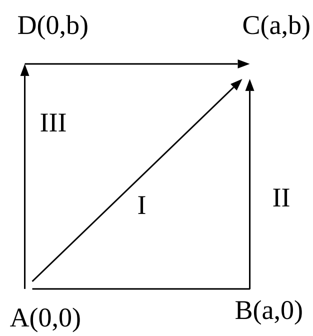
問 7.4 (基本)
物体が、距離 x において力 $F = -kx$ [N] を受けながら運動している。$x = 0$ から $x = a$ [m] まで運動したとき、力 F がした仕事を求めよ。

問 7.5 (基本)
原点 O の回りを中心力 $F = -\dfrac{a}{r^2}$ [N](a は定数) を受けながら、運動している質点がある。無限遠にある質点を、O からの距離 r [m] まで移動させるとき、力 F のした仕事はいくらか。

問 7.6
位置の関数である力 $\mathbf{F}$

$$F_x = py, \quad F_y = q$$

(p, q は定数) を受けた物体が右図に示す経路 I, II, III にしたがって点 A から 点 C まで動いた。それぞれの場合に力 $\mathbf{F}$ が行った仕事を求めよ。



[例題] 7.3
速度 v [m] で直線運動している質量 m [kg] の物体の速度を増すため、一定の仕事率 P [W] で仕事を加えたところ, 物体の加速度は最初の $\frac{1}{n}$ まで減少した。仕事を加えた時間の長さを求めよ。

[解] 仕事 (エネルギー) を加えた結果、物体の速度が v から V になったとする。加えた時間を t とすると、この間に加えた仕事は Pt となる。この仕事は、すべて物体の運動エネルギーの増加に使われたから

$$Pt = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

となる。従って $t = \dfrac{m}{2P}(V^2 - v^2)$ となる。ところで、仕事率は

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{f\,dx}{dt} = fv$$

と定義される。これを用いると運動方程式は、加速度を α とすると

$$m\alpha = \frac{P}{v}$$

と書ける。従って、最初 (仕事を加えはじめた直後) の加速度は $\alpha_1 = \frac{P}{mv}$、仕事を加え終わる直前の加速度は $\alpha_2 = \frac{P}{mV}$ であるから

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{n} \ \rightarrow \ V = nv$$

従って、加えた時間は $t = \frac{mv^2}{2P}(n^2 - 1)$ となる。

問 7.7 (基本)
真空中を、速さ v_1 [m/s] で飛んでいる質量 m [kg] のロケットがある。t 秒間で、速さを v_2 [m/s] ($> v_1$) とするために必要な仕事率 P [J/s] はいくらか。

問 7.8 (基本)
自重 75 トンの列車が $\frac{1}{800}$ の傾斜に沿って毎時 60 km の定速で登っている。列車は自重 1 トンにつき 3 kg 重 の抵抗を受ける。機関車の出しているパワーを求めよ。

第8章　エネルギーの保存則

重力や単振動を例にポテンシャル・エネルギーの概念を理解する。

ポテンシャル

山道を車で走っていると、「落石注意」の立て札を見かけることがある。道端にころがっている石には何とも感じないのに、高い崖の上に突き出た石には危険を感じる。何かのはずみで落下して下を通っている車に当たれば、確実に車は破壊されるからである。高い崖の上の石は、それだけのエネルギーを持っている。このエネルギーの大きさは、その石が道路からどれだけの高さにあるかによって決まる。この例のように、位置によって決まるエネルギーのことを、ポテンシャル·エネルギー (位置エネルギー) 又は単にポテンシャルという。

力学的エネルギー

運動エネルギーやポテンシャルのことを力学的エネルギーという。

エネルギー保存則

全エネルギー (運動エネルギーとポテンシャルの和) は時間がたっても変わらない。

[例題] 8.1

原点Oの周りを中心力 $F = -\dfrac{a}{r^2}$ [N](a は定数) を受けて、一定半径 r [m] で回転運動している質点 (質量 m [kg]) がある。

(1) O から距離 r [m] における質点のポテンシャル $U(r)$ [J] を求めよ。ただし、無限遠 ($r = \infty$) を基準にとる。

(2) 全エネルギー が $-\dfrac{a}{2r}$ となることを示せ。

[解](1)　物体に働く力を F とするとき、A 点を基準とする B 点のポテンシャルを求めるには、F とつり合う力、すなわち $-F$ が A から B ま

でにする仕事を計算すればよい。いま F は中心 O に向いており、動径方向に対して垂直な方向には仕事をしないので

$$U = -\int_{\infty}^{r}(-\frac{a}{r^2})dr = -\frac{a}{r}$$

(2) 原点 O からの距離を r、質点の速度を v とすると、運動方程式は

$$m(-\frac{v^2}{r}) = -\frac{a}{r^2} \ \rightarrow \ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{a}{2r}$$

従って、全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{a}{2r} - \frac{a}{r} = -\frac{a}{2r}$$

問 8.1 (基本)

地上で物体 (質量 m [kg]) が受ける重力 (重力加速度の大きさ g [m/s^2]) および、ばね定数 k [N/m] のばねの弾性力に対するポテンシャルを求めよ。基準はその点におけるポテンシャルが 0 になるように選ぶ。

[例題] 8.2

ばね定数 k [N/m] の軽いばねの一端を固定し、他端に質量 m [kg] の小物体 P を取り付け、滑らかな水平面上で振動させる。水平面上に x 軸をとり、P の運動方程式をたて、つぎの問いに答えよ。

(1) 初期位置 $x(0) = 0$、初速度 $v(0) = v_0$ として、この方程式を解き、時刻 t での位置 $x(t)$、速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) この運動方程式から、エネルギーの保存則
$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$(一定) を導き、$E$ の値を求めよ。

[解] (1) 運動方程式は $m\ddot{x} = -kx$
$\ddot{x} = -\omega^2 x$ (ただし$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$) と変形すると、解は $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ となる。これより速度は $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$ であるから初期条件より

$$x(0) = A\cos\delta = 0 \ldots ①, \qquad \dot{x}(0) = -A\omega\sin\delta = v_0 \ldots ②$$

①より $\delta = \dfrac{\pi}{2}$ (主値)、②より $A = -\dfrac{v_0}{\omega}$ となる。従って、

$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$\text{速度は}\ \ \dot{x}(t) = v(t) = v_0\cos\omega t$$

である。

(2) $\ddot{x} = -\omega^2 x$ の両辺に $\dot{x}$ を掛けて変形すると

$$\dot{x}\,d\dot{x} = -\omega^2 x\,dx$$

初期条件 $x = 0$ のとき $\dot{x} = v_0$ を用いて両辺を積分する

$$\int_{v_0}^{v}\dot{x}\,d\dot{x} = -\int_0^x \omega^2 x\,dx \ \to\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

両辺に m を掛けて整理すると

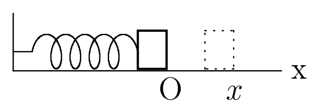
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\ (\text{一定})$$

となる。$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ であるから

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\ (\text{一定})$$

となり、これはエネルギー保存則を示す。全エネルギーは $E = \dfrac{1}{2}mv_0^2$ である。($x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ を $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$ へ代入して $E = \dfrac{1}{2}mv_0^2$ となることを確かめよ。)

問 8.2 (基本)



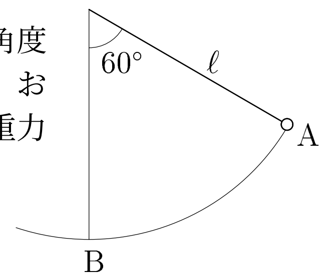
表面が滑らかな水平台の上に、左端を固定し、右端に質量 m [kg] の物体 P を取り付けた軽いばね (ばね定数 k [N/m]) を置き、静止させる。つぎに、P を左に移動しばねを x [m] だけ縮め、静かに放した。ばねが自然長に戻った瞬間の P の速さはいくらか。

問 8.3 (基本)

ばね定数 k [N/m] の軽いばねに、質量 m [kg] のおもりを吊るしたばね振り子がある。はじめ、ばねを伸び縮みのない状態 (自然長) に支えておき、急に放したとき、ばねは自然長より最大どれだけ伸びるか。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

[例題] 8.3

糸の長さ ℓ [m] の単振り子で、糸が鉛直と $60°$ の角度の位置 A からおもり (質量 m [kg]) を静かに離した。おもりが最下点 B を通過するときの速さを求めよ。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。



[解] A 点における全エネルギーは、位置を $z_{\rm A}$ 速さを $v_{\rm A}$ とすると

$$\frac{1}{2}mv_{\rm A}^2 + mgz_{\rm A}$$

B 点における全エネルギーは、位置を $z_{\rm B}$、速さを $v_{\rm B}$ とすると

$$\frac{1}{2}mv_{\rm B}^2 + mgz_{\rm B}$$

いま、$v_{\rm A} = 0$ である。また、B から測った A の高さは

$$z_{\rm A} - z_{\rm B} = \ell(1 - \cos 60°) = \frac{\ell}{2}$$

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_{\rm A}^2 + mgz_{\rm A} = \frac{1}{2}mv_{\rm B}^2 + mgz_{\rm B} \quad \to \quad \frac{1}{2}mv_{\rm B}^2 = mg(z_{\rm A} - z_{\rm B}) = \frac{mg\ell}{2}$$

従って　$v_{\rm B} = \sqrt{g\ell}$

問 8.4 (基本)

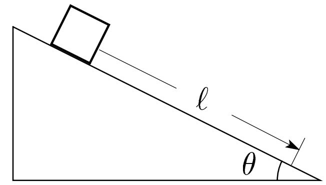
質量 m [kg] の小物体 P を、水平となす角 θ、初速 v_0 [m/s] で打ち上げた。P が地上に落下するまでの時間を t_0 [s] とするとき、t [s] ($< t_0$) 後における P の運動エネルギーと位置エネルギーの和はいくらか。

問 8.5 (基本)

初速度 v [m/s]、水平とのなす角 θ で、投げ上げた質点が到達できる最高の高さ h [m] はいくらか。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

問 8.6 (基本)

傾斜角 θ の滑らかな斜面上に物体 P(質量 M [kg]) を支えて静止させた後、静かに離した。斜面に沿って ℓ [m] だけ下った地点における P の速さはいくらか。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。



[例題] 8.4

物体が位置 $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ から $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ まで移動するときを考える。この間に物体に働く力 $\boldsymbol{F}$ のする仕事が、つぎの位置の関数 $U(x, y, z)$

$$U(x,y,z) = -\frac{a}{r} \qquad (\text{ただし、} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ a \text{ は定数})$$

の値の差 $U(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A}) - U(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ で与えられるとき、即ち

$$U(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B}) - U(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A}) = -\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

(1) $U(x, y, z)$ から導かれる力のベクトル $\boldsymbol{F}$ を求めよ。
(2) このような力を特に何というか。また、U のことを何というか。
(3) 自然界に存在するこのような力を具体的に挙げよ。

[解](1) $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{a}{r^2}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ldots$

$$\boldsymbol{F} = (-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}) = (-\frac{a}{r^3}x, -\frac{a}{r^3}y, -\frac{a}{r^3}z) = -\frac{a}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

(2) 保存力。U をポテンシャルという。
(3) 万有引力、重力、ばねの弾性力、など

問 8.7

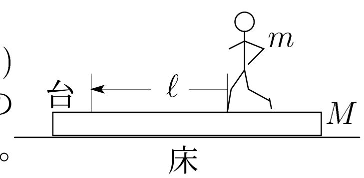
自然界には力の場として保存力の場しか存在しない。そうでないとしたらどのような矛盾が起きるか。

第9章　運動量保存則

運動量の保存則を様々な状況で使う。重心の運動が全運動量により記述できることを学ぶ。接触力の場合は、運動量保存則は作用・反作用の法則として理解できることを学ぶ。

9.1　作用・反作用の法則

[**例題**] **9.1**
水平な直線レールに沿って自由に動く台 (質量 M) の上を、質量 m の人がレールに沿って歩く。この人が台上で距離 ℓ だけ歩くと台はどれだけ動くか。



[**解**]　台に対する人の速さを v(向きは図の左方向) とし、床に対する台の速さを V(向きは図の右方向) とする。床に対する人の速度は $v-V$ である。運動量保存則から

$$m(v-V)-MV=0\ \rightarrow\ V=\frac{m}{M+m}v$$

台の上を歩いた時間を t とすると

$$\ell=vt\ \ \rightarrow\ t=\frac{\ell}{v}$$

台がこの間に動いた距離を L とすると

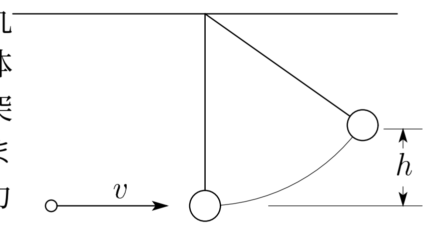
$$L=Vt=\frac{m}{M+m}v\cdot\frac{\ell}{v}=\frac{m}{M+m}\ell$$

問 9.1
上の問題で、台の重心の位置を x_1、人の位置を x_2、重心の位置を x_{G} とすると $x_{\mathrm{G}}=\dfrac{Mx_1+mx_2}{M+m}$ である。
人が台の上を ℓ だけ動いたときも、全体として重心が動かないことを用いて解け。

問 9.2 (基本)
質量 $M_{\rm A}$ の A と $M_{\rm B}$ の B の二人が滑らかな氷上で静止している。A が質量 m のボールを投げ, B が受け取った。A, B はどのよう運動をするか?

9.2 運動量保存

[**例題**] **9.2**
図のように、質量 M のおもりが糸に吊り下げられている。今、質量 m の弾丸を、このおもりに速さ v で水平に打ち込んだところ、弾丸はおもりの中で静止し、弾丸とおもりが一体となって運動し、高さ h まで上昇した。衝突時間は短く、弾丸がおもりの中で静止するまで、おもりは動き始めないものとする。重力加速度を g とする。



(1) 一体となった直後の速さ V はいくらか。
(2) 上昇した高さ h はいくらか。

[**解**](1) おもりと弾丸が 1 体化する直前と直後を考える。この 2 体が一体化するためにはエネルギーを散逸させなければならない。もし力学的エネルギーが保存するなら、衝突の後、2 体は 1 体化せず跳ね返り係数 1 で跳ね返る。したがって力学的エネルギー保存は成り立っていない。

衝突時、おもりと弾丸の間には水平方向の力が働く。おもりが弾丸に及ぼす力と弾丸がおもりに及ぼす力の間には作用・反作用の法則が成立している。この 2 体に働く水平方向の力は他にない。したがって、水平方向には運動量保存則が成り立つ。

$$mv = (m+M)V \ \rightarrow \ V = \frac{m}{m+M}v$$

(2) 1 体になった後、その 1 体には重力と糸の張力が働く。糸の張力は水平方向の成分も持つ。糸の張力は重力によって決まり、重力は外力であるので、水平方向にも垂直方向にも運動量は保存しない。

糸の張力は運動の方向に垂直に働くので仕事をしない。仕事をする唯一の力は重力であるが、重力は保存力である。したがって 1 体

となった後の運動に対しては、力学的エネルギー保存則が成り立つから

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh.$$

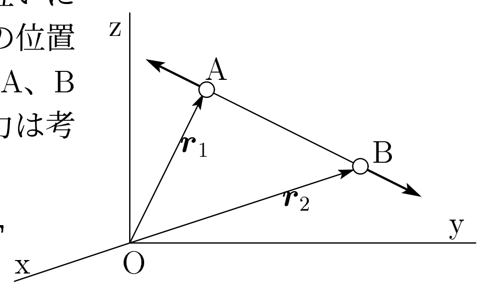
したがって

$$h = \frac{V^2}{2g} = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

が成り立つ。

問 9.3 (基本)

質量が m_1 と m_2 の 2 つの質点 A、B が互いに力を及ぼしあって運動している。A、B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ とし、力は A、B 間を結ぶ直線方向に働く力のみで、外力は考えない。

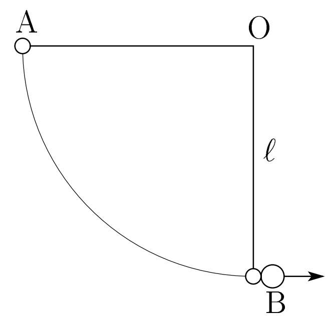


(1) A の運動が、運動方程式 $m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}$ に従うとき、B の運動方程式を書け。
(2) B からみた A の位置を $\boldsymbol{r}$ とするとき、加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を求めよ。
(3) A、B の運動を、A (又は B) からみた質量 μ の質点の相対運動とみなすとき、μ を換算質量という。μ を求めよ。
(4) A、B の運動量をそれぞれ $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ とする。それぞれの運動方程式を運動量を用いて表せ。
(5) $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 =$ 一定となることを示せ。

問 9.4 (基本)

長さ ℓ の糸の一端に質量 m のおもり A を結びつけ、他端を O 点に固定した振り子がある。

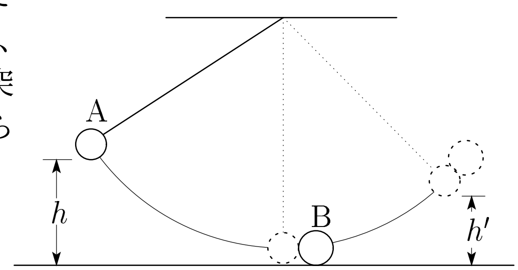
はじめ、図のように、糸をたるまない状態にして、A を水平に支えておき、静かに放して O 点の真下にある質量 M の小物体 B と弾性衝突させた。重力加速度を g とする。



(1) 衝突直前の A の速度 v はいくらか。
(2) 衝突直後の A,B の速度を、それぞれ v', V' とするとき、衝突の前後で成り立つ保存則を式で表せ。
(3) 衝突直後の B の速度 V' はいくらか。

問 9.5 (基本)

図のように、糸の一端を固定し、他端に小球 A(質量 m) をつるす。糸をたるまないようにして、最下点から h の高さまで持ち上げ、放したところ、A は最下点で、静止していた小球 B(質量 M) と正面衝突し、瞬間的に一体となって、最下点から h' の高さまで上がった。



(1) 衝突直前の A の速さ v はいくらか。
(2) 一体となった直後の速さ V はいくらか。
(3) h' は h の何倍か。

閑話休題:

ここまで物理学を学ばれてきた皆さんは、エネルギーの保存則、運動量の保存則を使うと、多くの問題を解くことができることに気づかれたことであろう。実際、力学の問題は、すべて、エネルギー保存則と運動量保存則を使うと解くことができるのである。では、なぜ最初に「力」という概念を学ぶのであろうか？

19 世紀以来、多くの著明な学者は物理学の初等的な教科書から「力」の概念を排除しようと努めてきた。哲学者バートランド・ラッセルは次のように述べている。「もし人々が力という古い概念を捨て新しい方法で世界について考えることを学ぶなら、物理的な想像力を革新することができるのみならず、人々のモラルや政治まで変えることができる。」(1925 年、相対論の ABC). しかし、今に至っても物理学の教科書から「力」の概念は排除されていない。

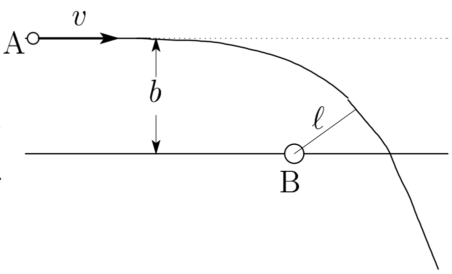
注
2 粒子 A, B の運動の場合、運動方程式は $\frac{dp_{\mathrm{A}}}{dt} = F, \quad \frac{dp_{\mathrm{B}}}{dt} = -F$ だから, 力 F は B から A への運動量 p の輸送率という意味を持つ。

物理学者は厳密な考察を行う時は「力」という言葉は使わない。力という概念は、惑星のような目に見える粒子の運動方程式を考えるとき以外、曖昧で多義的な意味しかもたず、厳密な考察には適さないのである。しかし、物理学者は、まず、$F = ma$ と呪文を唱え、F や m や a をいろいろな物に対応させて、新しいアイデアを得ている。$F = ma$ は厳密な意味を持たないにもかかわらず、それを排除すると物理学は創造性を失うのである。

9.3　角運動量の保存

[例題] 9.3

図のように、質量 m の小物体 A と原点 O に静止している質量 $M(M >> m)$ の物体 B との衝突を考える。無限遠における A の速度を v、衝突径数 (インパクトパラメータ) を b とし、A,B 間の距離を r とする。A,B 間には、$F = -G\dfrac{mM}{r^2}$ の引力が働いており、衝突の間、B は動かないものとする。



注

$r \to \infty$ のとき (距離 r での力)×(半径 r の球の表面積) が 0 に近付かない力は長距離力と呼ばれる。逆 2 乗法則にしたがう力は長距離力である。長距離力は無限の彼方まで影響が及ぶので衝突径数や無限遠での速度は意味をなさない。しかし、角運動量は保存量であるので明確な意味を持つ。

(1) A,B の最接近距離 ℓ における A の速さ V を求めよ。
(2) 最接近距離 ℓ を求めよ。

[解] (1) 角運動量保存則より

$$b \times mv = \ell \times mV \ \to \ V = \frac{b}{\ell}v$$

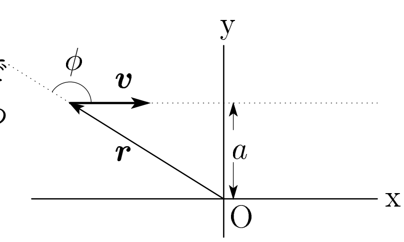
(2) エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 - G\frac{mM}{\ell} \ \to \ v^2 = V^2 - \frac{2GM}{\ell} = \frac{b^2v^2}{\ell^2} - \frac{2GM}{\ell}$$

$$v^2\ell^2 + 2GM\ell - b^2v^2 = 0 \ \to \ \ell = \frac{GM}{v^2}\left(\sqrt{1 + (\frac{bv^2}{GM})^2} - 1\right)$$

問 9.6 (基本)

図のように、質量 m の物体が一定速度 v で x 軸に平行に運動している。原点 O のまわりの角運動量の大きさはいくらか。



問 9.7

質量 M の物体 A と同質量の物体 B が長さ ℓ の軽い棒で結び付けられている。質量 m の物体 C が AB の垂直に物体 A と弾性衝突した。この後, A, B, C はどのような運動をするかを, エネルギー保存, 運動量保存, 角運動量保存の原理を使って分析せよ。

第10章　力学の原理と現実

現実の現象の分析は、適切な近似によって適切な考察の枠組を組み立て、適切な問題を設定することから始まる。状況は千差万別であるので、何が適切かを判断するには、物理の原理に基づいた高度の判断が必要である。特に初等物理では簡単そうに見える日常用語 (例えば「軽い」、「静か」など) の背後に高度な物理的判断が潜んでいることが多いので注意が必要である。

10.1　外力と撃力

考察対象を重要な着目部分と大きな周辺環境に分けられる場合、周辺の環境が被る反作用を無視することができる。この反作用を無視した時、着目部分が受ける力を**外力**という。

外力が一瞬間のみ働き、その大きさが他の力と比べて比較にならないほど大きい時、その力を**撃力**いい、このように考える近似を衝撃 (インパルス) 近似という。衝撃近似では無限大の撃力と無限小の継続時間をかけた**力積**が重要な役割を果たす。

[例題] 10.1

ボールがバットに当たった後、5.0×10^{-4} s 後に速さが 80 m/s になった。

(1) ボールの質量を $m = 0.14$ kg としたとき、バットによりボールに与えられる力 (一定) を F として、ボールの運動方程式を求めよ。(重力による影響は無視できる)

(2) バットがボールに当たった時間を $t = 0$ として、力が与えられている間のある時刻 t における速度 v を求めよ。

(3) 力 F を求めよ。

[解]　**(1)** ボールの飛ぶ方向に沿って x 軸をとる。運動方程式は $m\ddot{x} = F$.

(2) 初期条件は $t = 0$ で $v = 0$ である。従って $v = \dot{x} = \dfrac{F}{m}t$

(3) 求める力は $F = \dfrac{mv}{t} = \dfrac{0.14\,\mathrm{kg} \times 80\,\mathrm{m/\,s}}{5.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}} = 2.2 \times 10^4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$

問 10.1 (基本)
前問を運動量変化が力積に等しいことを用いて解け。

問 10.2 (基本)
質量 $M = 1500\,\mathrm{kg}$ の自動車が $v_{\mathrm{i}} = -60.0\,\mathrm{km/\,h}$ で壁に激突し、$v_{\mathrm{f}} = 10.0\,\mathrm{km/\,h}$ で跳ね返された。この衝突が $\Delta t = 0.15\,\mathrm{s}$ 続くとして、衝突による力積と自動車に作用する平均の力を求めよ。

問 10.3 (基本)
質量 $100\,\mathrm{g}$ のボールを高さ $h = 2\,\mathrm{m}$ から落す。ボールは床と衝突したあと, 高さ $h' = 1.5\,\mathrm{m}$ まで鉛直に跳ね返った。衝突時間は $0.01\,\mathrm{s}$ であるとする。床がボールに及ぼす平均の力を求めよ。

問 10.4 (基本)
質量 $50\,\mathrm{g}$、半径 $2\,\mathrm{cm}$ のゴルフボールをクラブで打ち上げ角 45° で打った所、ボールは $200\,\mathrm{m}$ 飛んだ。衝突時間、および衝突時にボールに作用する平均の力を推定せよ。ただし、空気抵抗は無視する。

問 10.5
質量 M の点 A と質量 m の点 B が長さ ℓ の軽い棒で結ばれている。点 B に AB に垂直に撃力を与えたとき、棒上のどの点を持てば衝撃を感ぜずにすむか?

10.2　抗力と摩擦力

考察対象が複雑な系である場合、観測や実験によって重要な定数を取り出して公式を作り、その公式を使って問題設定をすることが多い。このような考察を**現象論**的考察という。摩擦力概念の導入はその典型である。

面の抗力や糸の張力も現象論的な力である。面の**抗力**は物体が面から浮き上がりも沈み込もしないこと、つまり面に**拘束**されていることを力の概念を使って記述している。糸の張力も同様である。

[例題] 10.2

幅 12 m の凍結した道路の端にある人が立っている。その人の靴と道路の間の最大静止摩擦係数は $\mu = 0.05$ である。この人が滑べらずに道路を横断するのに必要な最小時間を求めよ。

注

運動量保存則は、全運動量は変わらないが、運動量は配置を変えうることを意味する。この問題では運動量は地球から人間へ移っている。地球は運動量が減ってもなんの影響も受けない。これが外力の考え方である。

摩擦力は現象論的な力であるので、運動方程式を積分した式から摩擦力のする仕事は (摩擦力)×(重心の移動距離) であると結論してはならない。運動量保存則とエネルギー保存は独立な法則であり、運動方程式は運動量の移動を表すが、エネルギーの移動は表さない。

[解] 人を前進させる外力は静止摩擦力である。道路が受ける反作用は無視できる。

靴と道路の間に相対運動はないから、静止摩擦力は仕事をしない。もし摩擦力が仕事をするとしても、それは運動エネルギーを減少させる方向に仕事をする。これは次のように解釈できる。運動量は靴と道路の間の面を通して地球から人体に流れ込むが、エネルギーは流れ込まない。エネルギーは人体内部で食物のエネルギーから運動エネルギーへ変化している。

質量 M の人は道路面から $N = Mg$ の垂直抗力を受けている。したがって摩擦力は μMg である。人が進む距離を x とすると

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \mu Mg.$$

$t = 0$ で $x = 0$ とすると,

$$x = \frac{1}{2}\mu g t^2.$$

$x = 12\,\mathrm{m}$ のとき

$$t = \sqrt{\frac{2x}{\mu g}} = \sqrt{\frac{2 \times 12\,\mathrm{m}}{0.05 \times 9.8\,\mathrm{m/\,s^2}}} = 7.0\,\mathrm{s}.$$

したがって, 最短 7 秒必要である。

問 10.6 (基本)

20 m/ s で走っていた質量 10 t のトラックにブレーキをかけて止めた時、発生する熱量はいくらか?

問 10.7 (基本)

2 本の柱の間の距離が 5 m ある。柱の間に張った軽い糸の中央に 1 kg の鳥が止まると、糸は 0.2 m 下がった。この鳥は糸にどれだけの張力を生じさせるか?

問 10.8 (基本)
滑らかな水平面上に置いたばねの一端を固定し、他端を水平方向に力 F で引っ張ったところ、ばねは自然長より ℓ だけ伸びた。同じばねを両端から力 $2F$ で引っ張ったとき、ばねの伸びはいくらか。