1 逆関数法による乱数の発生

1.1 指数関数

確率分布 $f(x)$ $(0 < x)$ が次のような指数関数の場合を考えよう．

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \tag{1}$$

上式に従う乱数 a が発生できたとすると

$$F(a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda a}, \tag{2}$$

は 0 から 1 の区間に一様に分布する．従って，一様疑似乱数 r $(0 < r < 1)$ とすると

$$a = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-r) \tag{3}$$

より乱数 a が得られる．なお，乱数 $1-r$ と r とは等価であるので次式としても良い．

$$a = -\frac{1}{\lambda}\ln r. \tag{4}$$

1.2 階段関数

確率分布 $f(x)$ が次のような階段関数である場合を考えよう (図 1 参照).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3} & \left(0 < x < \dfrac{1}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{2}{3} & \left(\dfrac{1}{2} < x < 1\right) \end{cases} \tag{5}$$

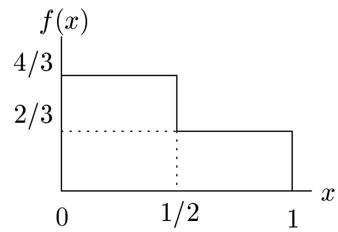

図 1: 階段関数

階段関数 $f(x)$ の積分 $F(x)$ は

$$F(x) = \int_0^x f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}x & \left(0 < x < \dfrac{1}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3} & \left(\dfrac{1}{2} < x < 1\right) \end{cases}$$

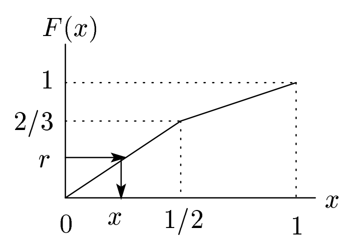

図 2: 階段関数の積分 $F(x)$

関数 $F(x)$ を図 2 に示している．$F(x) = r$ とおいて，$F(x)$ の逆関数を求めると

$$x = F^{-1}(r) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}r & \left(0 < r < \dfrac{2}{3}\right) \\[2ex] \dfrac{3}{2}r - \dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{2}{3} < r < 1\right) \end{cases} \tag{6}$$

(0,1) の範囲に発生させた一様乱数 r によって (6) 式より階段関数 $f(x)$ に従う分布を得ることができる．$f(x)$ に従う分布に対して，F-BASIC[1]によるシミュレーション結果を図 3 に示す．試行回数は 60000 回，統計分割は 100 とした．分布の縦方向は 5 カウント単位で示されている．

F-BASIC プログラム

```
'distribution by inverse function
NP=100：NMAX=60000
dim P(NP)
X0=100:Y0=400:LX=3:LY=0.2
randomize TIMER
N=0
color 0,15:cls
10 N=N+1:if N>NMAX then 20
R=rnd(1)
if R<(2/3) then X=R*3/4 else X=(R*3-1)/2
M=int(X*NP):P(M)=P(M)+1:PMY=Y0-P(M)*LY
line(X0+M*LX,PMY)-(X0+(M+1)*LX,PMY),,5
goto 10
20 input "hit any key";a$
end
```

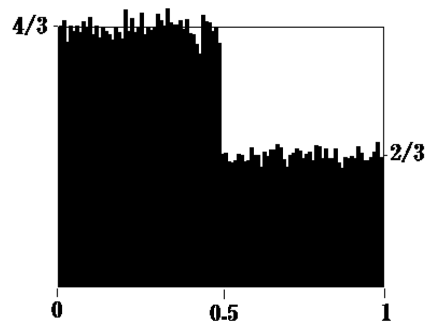

図 3: シミュレーション結果

[1]富士通が開発した F-BASIC コンパイラーは発売中止になっているが類似の free の N88BASIC インタープリタ（開発者：潮田 康夫氏）は Web からダウンロードできる．http://www.vector.co.jp/soft/win95/prog/se055956.html